CWI
P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
Telephone + 31 - 20 592 9333
Telefax + 31 - 20 592 4199
URL http://www.cwi.nl

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

JACOBI BERNOULLI,
Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè fcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenfis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃCC XIII.

Vakantiecursus 1997
Rekenen op het Toeval

ISBN 90 6196 476 8
NUGI-code: 811

Printed in the Netherlands

Inhoud

Ten Geleide

A.W. Grootendorst

In dit jaar is het onderwerp van de (51ste!) vacantiecursus –*Rekenen op het Toeval*– niet alleen nauw verbonden met vragen uit de praktijk van alledag, maar het heeft ook rechtstreeks verband met de stof die bij het VWO op dit ogenblik wordt onderwezen, terwijl dit thema daar wellicht in de toekomst een grotere plaats zal gaan innemen.

Bij dit laatste denk ik niet alleen aan de vele praktische toepassingen waarmee de leerlingen kennis moeten maken omdat zij daarmee later veelvuldig geconfronteerd zullen worden, maar vooral ook aan het aankweken van een bepaalde, voor dit vak karakteristieke, denkwijze en aan de vruchtbare symbiose die er kan ontstaan tussen het onderwijs in de differentiaal- en integraalrekening –zeg maar 'calculus'– enerzijds en dat in de statistiek en waarschijnlijkheidsrekening anderzijds.

De voorbereidingscommissie prijst zich dan ook gelukkig dat tot de sprekers zowel personen behoren die direct betrokken zijn bij de ontwikkeling van dit vakgebied, alsook personen die nauwe banden onderhouden met het VWO en de ontwikkeling van de daar vigerende en geplande leerstof.

Zoals gebruikelijk is geworden, vormen enkel historische schetsen het uitgangspunt. Vervolgens een aantal fundamentele theoretische beschouwingen en tenslotte een aantal toepassingsgebieden en zeer moderne illustraties (fractals), terwijl er ook gelegenheid geboden wordt voor zelfwerkzaamheid.

Als eerste oriëntatie nu de *Series Lectionum.*

De eerste lezing in deze cursus –die van *mevrouw dr. I.H. Stamhuis*– schetst, zoals de titel reeds doet vermoeden, die historische ontwikkeling van de statistiek van louter verbale, kwalitatieve wetenschap, tot de moderne statistiek, verdeeld in beschrijvende statistiek en mathematische statistiek. Het als eerste genoemde deel verzamelt en bewerkt de gegevens en legt die in getallen vast, het tweede formuleert conclusies daaruit op grond van steekproeven, waarbij de kanstheorie een grote rol speelt. Spreekster kiest haar uitgangspunt aan het begin van de negentiende eeuw met de figuur van Adriaan Kluit (die als hoogleraar Geschiedenis in Leiden in 1806 de eerste hoogleraar statistiek werd) en vervolgt haar weg tot aan het begin van onze eeuw en besluit met Galton en Pearson (†1936).

Drs. W. Kleijne voert ons terug naar het begin van de kansrekening, d.w.z. naar het werk van Christiaan Huygens dat oorspronkelijk verscheen in het Latijn onder de titel *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (1657), maar in 1660 een vertaling in het Nederlands beleefde: *Van Rekeningh in Spelen van Geluck.* Hierin worden al eerder gevoerde discussies over dobbel- en kansspelen geanalyseerd. Aansluitend wordt de opkomst van de levensverzekeringwiskunde (de *Waerdije* van Jan de Witt uit 1671) aan de orde gesteld.
Een interessant detail: drs. Kleijne bereidt een bewerking –in hedendaags Nederlands– voor van de zojuist genoemde *Rekeningh*, die in dit najaar zal verschijnen.

Prof.dr. H.G. Dehling stelt het Bernoulli-experiment ('kruis of munt') centraal en voert, daarvan uitgaande, een aantal bekende kansverdelingen in, zoals de binomiale, meetkundige, negatief-binomiale, Poisson-, exponentiële, gamma- en normale verdeling. Ook de centrale limietstelling krijgt zijn plaat in dit verhaal, dat eindigt met een verrassend voorbeeld.

Prof.dr. A.G.M. Steerneman zet in zekere zin de lezing van *mevrouw dr. Stamhuis* voort. Zijn doel is het intuïtieve begrip 'schatten' nader te preciseren. Het wezen van de statistiek definieert hij als het trekken van algemeen geldende conclusies uit onvolledige en onnauwkeurige waarnemingen en het aangeven van de betrouwbaarheid van het resultaat. De basis hiervoor is de kansrekening. Aan de van het Bernoulli-experiment licht de spreker dit toe, waarbij uiteraard het begrip 'kans' zorgvuldig geanalyseerd wordt.

Een belangrijke, interessante en relatief recente toepassing van de kansrekening is de theorie van de wachttijden en wachtrijen met als grondlegger *Agner Erlang* (1878–1929). Hieraan is de lezing van *prof.dr.ir. J.H.A. de Smit* gewijd. Tevens wijst deze met nadruk op het interdisciplinaire karakter van deze tak van de wiskunde. Bijzonder interessant, speciaal voor leraren, is de aandacht die spreker geeft aan de plaats die dit onderwerp kan innemen in het nieuwe VWO-programma, temeer waar de spreker ten nauwste betrokken is bij de opstelling daarvan.

De lezing van *prof.dr. C.A.J. Klaassen* is direct op de praktijk gericht. Het gaat hier om de vraag naar de vereiste omvang van een steekproef bij het keuren van waren. De gedachte is deze: wanneer een producent achtereenvolgens partijen goederen aanlevert die aan de eisen voldoen, dan kan daarna met een steekproef van geringere omvang worden volstaan (Bonus), maar indien niet, dan wordt er strenger opgetreden (Malus). Deze gedachte wordt omgezet in een formule voor de daartoe vereiste omvang van de steekproef.

Sinds 1989 (*Wiskunde in de Gouden Eeuw*) stelt een 'oefenuur' de toehoorders in de gelegenheid actief aan de cursus deel te nemen. Het initiatief daartoe werd destijds genomen door *dr. J.A. van Maanen*, die ook dit jaar een bijdrage levert en wel in de vorm van een met zorg samengestelde selectie uit vraagstukken die zich de laatste twee eeuwen voordeden op het gebied van de kansrekening.

De voordracht van *prof.dr. J.M. Aarts* legt verband tussen het onderwerp *Chaos* van het vorig jaar en het thema *Toeval* van dit jaar, van welk verband men het bestaan reeds intuïtief zou vermoeden. Spreker laat ons zien hoe men met behulp van geschikt gekozen kansverdelingen fraaie fractals kan genereren.

Uit dit summiere overzicht kan men reeds opmaken dat het een zeer interessante cursus belooft te worden, waarin –naar wij hopen– veel begrippen waarover toch bij velen een waas van geheimzinnigheid ligt, verhelderd zullen worden.

Een invariante grootheid in het *Ten Geleide*, dat ieder jaar weer de syllabus opent, is een dankwoord aan allen die meegewerkt hebben aan de realisatie van de Vacantiecursus.

Dit jaar zij allereerst genoemd *dr. M. Bakker* die met grote toewijding en accuratesse de ingeleverde bijdragen omzette in deze fraaie syllabus. Hij kon daarbij rekenen op de steun van de dames *Simone Panka* en *Minnie Middelberg*, alsook op de medewerkers van de reproductieafdeling van het CWI.

De logistieke begeleiding was ook dit jaar weer in de vertrouwde handen van *Mevrouw M. Bruné*: zij verzorgde de administratie van de deelnemers en regelt de dagelijkse gang van zaken tijdens de cursusdagen.

Veel dank ook aan het CWI en de TU Eindhoven voor de geboden gastvrijheid!

De voorbereidingscommissie hoopt van harte dat de deelnemers veel nieuwe kennis zullen opdoen en veel oude kennissen zullen ontmoeten, hetgeen niet betekent dat 'nieuwe gezichten' niet welkom zouden zijn; integendeel!

Aan allen genoeglijke dagen toegewenst!

A.W. Grootendorst

Vakantiecursus 1997

pp. 1 – 22

Historische Inleiding: Statistiek, van Woorden naar Waarden

Ida Stamhuis

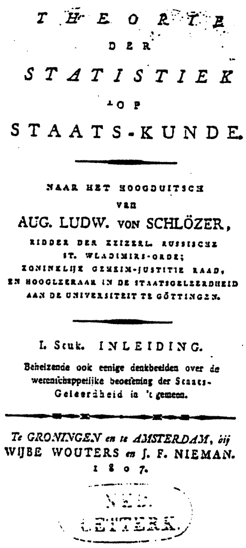
VU Amsterdam, Vakgroep Algemene Vorming, De Boelelaan 1081, 1081 MC Amsterdam

1. Statistiek een vak van woorden

Dat de statistiek een wetenschap was, waarin woorden het centrale bestanddeel vormen, dat kunnen wij ons nu nauwelijks voorstellen. Toch is het zo geweest; in Nederland nog aan het begin van de vorige eeuw. Dat blijkt onder meer uit de titel van een uit het Duits vertaald boek, dat verscheen in 1807 en ging over een nieuw vakgebied. De titel was *Theorie der Statistiek of Staatskunde*. Statistiek was toen blijkbaar identiek aan staatskunde. Het was een vakgebied dat gewijd was aan kennis over een staat. En het betrof hier kennis in een brede zin. Deze kennis was hoofdzakelijk kwalitatief en bestond dus uit woorden. Slechts een klein gedeelte was kwantitatief en betrof waarden.

Het vakgebied waar we het nu over hebben was in Duitsland al in de zeventiende eeuw aan de universiteiten ontstaan en in de achttiende eeuw was er de naam statistiek aan verbonden. Duitsland was in die tijd nog geen staatkundige eenheid; het vormde een lappendeken van staten en staatjes. Er ontstond een behoefte om de informatie over zo'n staat op een systematische manier te rangschikken, zodat ook een vergelijking van staten mogelijk werd. De 18e-eeuwse Göttingse hoogleraar Gottfried Achenwall werd later wel de 'vader van de statistiek' genoemd. Deze Achenwall behandelde van elke staat onder meer de geschiedenis, het klimaat, de bevolking, de wetgeving, de stand van de wetenschap, de industrie, de handel en de militaire macht. Het ging er volgens hem om hoe gelukking of ongelukkig een staat was. Alle factoren die daaraan bijdroegen of eraan afbreuk deden, moesten op systematische wijze worden besproken. Ook de liefde en de haat die de onderdanen voor hun regering voelden, behoorden daartoe.

Het succes van dit nieuwe vak hing samen met het ontstaan van een moderner staatsbestuur, waaronder een groei van de bureaucratie en een formalisering van het bestuur. De behoefte groeide aan een opleiding, waarin toekomstige politici en ambtenaren relevante kennis kregen onderwezen. Daaraan moest de statistiek een bijdrage leveren.



THEORIE
DER
STATISTIEK
OF
STAATS-KUNDE.

NAAR HET HOOGDUITSCH
van
AUG. LUDW. VON SCHLÖZER,
RIDDER DER KEIZERL. RUSSISCHE
ST. WLADIMIRS-ORDE;
KONINKLIJK GEHEIM-JUSTITIE RAAD,
EN HOOGLEERAAR IN DE STAATSGELEERDHEID
AAN DE UNIVERSITEIT TE GÖTTINGEN.

I. Stuk. INLEIDING.
Behelzende ook eenige denkbeelden over de wetenschappelijke beoefening der Staats-Geleerdheid in 't gemeen.

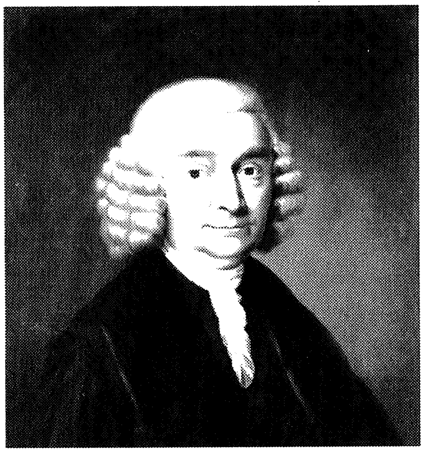
Te GRONINGEN en te AMSTERDAM, bij
WIJBE WOUTERS en J. F. NIEMAN.
1807.

FIGUUR 1. Titelblad van *Theorie der Statistiek of Staats-kunde.*

Mogelijk werd het nieuwe vakgebied 'statistiek' genoemd, omdat er in de zeventiende eeuw in Italië een traditie had bestaan, genaamd 'Ragione di Stato', ofwel 'het vakgebied van de staat'. Een man die zich met staatszaken bezighield heette een 'statera'. Het kan ook zijn dat het woord is afgeleid van het Latijnse woord 'status', dat toestand betekent, maar ook staat kan aanduiden.

2. Onderwijs in de statistiek, een nieuw initiatief

Deze Duitse statistiek kreeg ook in Nederland haar aanhangers en beoefenaren. Bijvoorbeeld ging *Adriaan Kluit* (1735–1807), hoogleraar te Leiden in de oudheidkunde en de geschiedenis, in 1802 op eigen initiatief statistiekcolleges geven. Waarom? Aan de oudheidkunde en de geschiedenis zou hij toch wel zijn handen vol hebben en was statistiek niet iets heel anders? Het antwoord is tweeërlei. Hij had niet veel te doen, want hij was uit zijn ambt ontzet, aangezien hij een aanhanger van Oranje was en in 1795 deze groep de macht aan de patriotten had moeten overdragen. Kluit gebruikte de vrijgekomen tijd om zich in de statistiek te verdiepen. Hij had voor deze vernieuwende aktiviteit ook een inhoudelijk argument. Hij was van mening dat statistiek en geschiedenis veel met elkaar te maken hadden: statistiek noemde hij ook wel 'stilstaande geschiedenis' en geschiedenis 'doorgaande statistiek'. Hij noemde het nieuwe vak trouwens zowel statistiek als staathuishoudkunde. Staathuishoudkunde is een ander woord voor economie. Betekent dit dan dat Kluits statistiek later economie is gaan heten? Nee, dat kan je zo niet zeggen: de statistiek van rond



FIGUUR 2. Adriaan Kluit (1735–1807). Foto Iconografische Bureau Den Haag.

1800 is een voorloper van de latere statistiek, maar ook van economie en van sociologie. De breedheid van het vak kan afgelezen worden aan de vele namen, die het aanvankelijk had: statistiek, stilstaande geschiedenis, staatskunde en staathuishoudkunde.

Die breedheid weerspiegelt zich ook in de opvattingen van Kluit over de inhoud. Volgens de Leidse hoogleraar bevatte de statistiek de kennis die nodig zou zijn om de "waare kragten", ofwel de macht en de welvaart van een land, te leren kennen. Daartoe moest men de inwendige staatsgesteldheid of het huishoudelijke van een staat bestuderen. Kende men deze dan had men een indruk waartoe een bepaald volk in staat was, zowel op zichzelf als in vergelijking met buitenlandse mogendheden. De mogelijke vergelijking met andere landen speelde een belangrijke rol.

Kluit onderscheidde twee aspecten aan de huishouding van een staat, namelijk het 'natuurlijke' en het 'zedelijke'. Onder de natuurlijke gesteldheid van een land verstond hij ongeveer hetzelfde als wij: haar ligging, grenzen en naburen, grootte en klimaat. Voorts vroeg hij zich af welke nuttige gevolgen de natuurlijke gesteldheid had. Het 'zedelijke' was voor hem een veel ruimer begrip dan voor ons: hij behandelde bij dat aspect allereerst de bewoners van het land, onder andere in staatkundig opzicht, maar ook hun aantal en hun karakter. Ook hun middelen van bestaan en hun welstand rekende hij tot het 'zedelijke'. Deze konden worden behandeld aan de hand van een bespreking van visserij, akkerbouw, veeteelt, handwerk, koophandel en geldzaken. Als tweede onderdeel van het 'zedelijke' beschouwde Kluit de regering, zowel in het verleden als in het heden. Een belangrijke vraag was in hoeverre de regering de rust, de veiligheid, de vrijheid en de welvaart van haar volk had kunnen verzekeren, en in hoeverre ze had gezorgd voor het behoud en de vermeerdering van het aantal inwoners en de vergroting van de nationale vlijt. Ook behandelde hij de defensie.

In Kluits college kwamen vele onderwerpen aan de orde. Hij trachtte Nederland zo volledig mogelijk in kaart te brengen. Aan de koophandel van de Oost-Indische Compagnie, bijvoorbeeld, wijdde hij 90 bladzijden en aan de inkomsten en uitgaven van de staat zo'n 150.

Zowel economische, antropologische, sociologische als geografische onderwerpen kwamen bij Kluits bespreking van een staat aan bod. Het doel was na te gaan in hoeverre ze betekenis hadden voor de macht en de welvaart van een land. Traditioneel was de aandacht bijna altijd beperkt geweest tot juridische en staatkundige aspecten. De statistiek was een belangrijke vernieuwing in vergelijking met het verleden, want zij wilde zich op de feiten richten die inzicht gaven in de uitwerking van bepaalde maatregelen, zodat duidelijk werd welke maatregelen het meest noodzakelijk waren. In dat licht waren demografische, landbouwkundige en economische gegevens van groter belang dan de staatkundige inrichting van een land.Hoewel Kluit zich meestal tot feitelijke beschrijvingen beperkte, lukte dat niet altijd. Soms kwamen er ook ideologisch geladen uitspraken om de hoek kijken. Enkele kenmerken van de Nederlandse samenleving vond hij er op achteruitgegaan, zoals: "De gewoonte dat de Moeders haar kinderen zelfs voeden en behandelen, die hier doorgaans zeer lang aanhield, is thans zoo algemeen niet meer". Maar tot zijn tevredenheid kon hij daarnaast opmerken dat er "nergens zoo weinig onechte kinderen zijn dan hier; de Echteband heiliger is dan elders en de liefde tusschen ouders en kinderen nergens grooter."

3. Theorie der probabiliteit van 't leven

Voor Kluit was de statistiek dus voornamelijk een vakgebied dat uit woorden bestond, maar dat betekende niet dat hij geen waarden wilde gebruiken. Als het voor een bepaald onderwerp van pas kwam, maakte hij graag gebruik van getalsmatige informatie. Zijn beschouwingen over het bepalen van het bevolkingsaantal zijn het meest kwantitatief. Hij was bijzonder in dergelijke getallen geïnteresseerd. In die tijd waren velen van mening dat het bevolkingsaantal een maat was voor de welvaart en de macht van het betreffende gebied. Echter bevolkingsregisters werden niet bijgehouden en volkstellingen werden pas in de loop van de negentiende eeuw systematisch georganiseerd. In Nederland zou de eerste volkstelling in 1829 worden gehouden. De omvang van de bevolking was dus onbekend. Maar er was wel een indirekte methode om daarvan op de hoogte te geraken. Maar dan had je in Kluits woorden de "theorie der probabiliteit van 't leven" nodig. Deze theorie leerde dat er een vaste verhouding tussen het bevolkingsaantal en het jaarlijkse sterfteaantal bestaat. En in tegenstelling tot het bevolkingsaantal werd het jaarlijkse sterfteaantal wel bijgehouden. In de stad zou die verhouding ongeveer 1 op 25 zijn en op het platteland 1 op 40. En zo kon je dan toch een globaal idee van het bevolkingsaantal krijgen.

Het is niet vanzelfsprekend dat de ideeën van Kluit nu nog bekend zijn. Hij heeft geen boek geschreven waarin hij zijn opvattingen uiteen heeft gezet. Deze informatie is op andere wijze voor ons bewaard gebleven. In de Leidse universiteitsbibliotheek worden Kluits collegeaantekeningen bewaard en bovendien enkele diktaten van studenten die zijn colleges hebben gevolgd. En omdat het indertijd gebruik was, dat de student bijna letterlijk opschreef wat de docent te berde bracht, vormen deze diktaten een betrouwbare informatiebron.

Kluit werd na 1802 spoedig in zijn oude rechten hersteld. In 1806 had zijn statistiekonderwijs zoveel erkenning verworven dat het officieel aan zijn leeropdracht werd toegevoegd. Lang heeft Kluit trouwens niet van deze erkenning kunnen genieten. Op 12 januari 1807 werd Leiden getroffen door een grote ramp: in het centrum van Leiden ontplofte een met kruit geladen schip. Kluits huis was één van de vele die toen instortten en hijzelf behoorde tot de dodelijke slachtoffers. Maar zijn initiatief bleef doorwerken. In 1815 bepaalde de centrale overheid dat de Leidse universiteit verplicht was om colleges in de statistiek aan te bieden. Kennis van dit vakgebied was verplicht om het doctoraal examen aan de juridische faculteit af te kunnen leggen.

4. Tabellenknechten en tabellenfabrikanten

Zo was aan het begin van de negentiende eeuw in Nederland statistiek een vak dat hoofdzakelijk uit woorden bestond en waarin waarden een ondergeschikte rol speelden. Toch doemden de waarden aan de horizon op en er waren personen die probeerden waarden in dit nieuwe vakgebied een steeds belangrijker positie te verschaffen. Dat kan tussen de regels door gelezen worden in de omschrijving van statistiek in de eerste druk van het Woordenboek voor Kunsten en Wetenschappen van G. Nieuwenhuis uit 1826. Daar vinden we namelijk onder het hoofd 'statistiek':

> "Statenkunde, statenbeschrijving, uit staatkundige oogpunten beschouwd. Zij bepaalt zich tot wezenlijk voorhanden zijnde staten en niet tot denkbeeldige, en draagt dus den tegenwoordigen toestand van eenen staat voor, zoo als die in zijne gesteldheid, vereeniging en de werkzaamheden zijner krachten gegrond is. Hierdoor is zij een uitmuntend voorbeeld voor de Staatkunde, en een leerrijk oefenschool voor den staatsman; alleen moet zij in geen bloot tabellenwerk en getalregisters ontaarden."

Het was volgens de auteur nog wel vanzelfsprekend dat statistiek uit woorden bestond, maar daarnaast was het blijkbaar noodzakelijk geworden voor het gevaar te waarschuwen dat waarden, zoals te vinden in tabellen en getalregisters, deze voorkeurspositie zouden overnemen! Er was in dit nieuwe vakgebied dus blijkbaar iets aan de hand met betrekking tot de verhouding tussen woorden en waarden.

Deze reactie had ermee te maken dat er een ontwikkeling in Duitsland gaande was die aan het eind van de achttiende eeeuw was begonnen en in het begin van de negentiende eeuw in een ordinaire ruzie was ontaard. Aan het eind van de achttiende eeuw waren daar de overheidsarchieven steeds toegankelijker geworden en was er veel meer informatie boven water gekomen waarvan een aanzienlijk deel getalsmatig was en dus uit waarden bestond. Sommigen statistici gingen de verzamelde gegevens, om ze goed te kunnen vergelijken, per land ordenen in tabellen. In het laatste kwart van de achttiende eeuw verscheen er nogal wat van dergelijke literatuur. Door het ordenen in tabellen kreeg men een overzicht van een bepaald land en kon men in één oogopslag meerdere landen met elkaar vergelijken. U kunt zich misschien indenken dat door deze benadering logischerwijze meer nadruk op díe onderwerpen kwam te liggen die in getallen waren weer te geven. Hiertegen kwam de oorspronkelijke 'Göttingse School' in het geweer. De aanhangers van deze school voelden zich hoog verheven boven een puur cijfermatige benadering. Volgens hen was de werkelijk belangrijke informatie niet in cijfers weer te geven. Zij spraken dan ook van "Tabellenstatistici" of zelfs snerend van "Tabellenknechten" en "Tabellenfabrikanten". In de *Göttinger gelehrte Anzeigen* van 1806 lezen we:

> "Naar onze mening is het het misbruik van de tabellenmethode welke alles tot getallen wil reduceren, waardoor deze studie niet alleen van alle geest wordt geroofd, maar ook nog praktische gevolgen van geheel andere aard heeft. (.....) Voor een nationale geest, voor vrijheidsliefde, voor het genie en het karakter van grote en kleine mannen aan de top bestaan er geen kolommen. Dergelijke dingen worden dan ook niet aan de orde gesteld."

Dit verschil van inzicht ontaardde in een ordinaire ruzie, waarbij niet serieus werd ingegaan op elkaars argumenten. De 'tabellenstatistici' hoorden met verachting het gejammer, dat de statistische literatuur werd bedorven door het onderzoek naar de grootte en het bevolkingsaantal van staten. Ze beschouwden de ideeën van hun tegenstanders als hersenschimmen die zich vast en zeker verbreidden in landen waar aristocraten regeerden die het liefst in het geheel geen statistische informatie openbaar gemaakt wilden zien.

Getuige een uitspraak in dezelfde *Göttinger gelehrte Anzeigen* is het waarschijnlijk dat de hierdoor ontstane controverse tot gevolg had dat een meer kwantitatieve benadering nog lange tijd weerstand ondervond. Deze uitspraak luidde:

> "Tot een dom knoeiwerk is de statistiek geworden alleen door de schuld van de politieke rekenkundigen. Deze stompzinnige mensen meenden en verbreidden de illusie, dat men de krachten van een staat al kent, wanneer men alleen maar het getal vierkante mijlen van het gebied weet, zijn menigte aan mensen, zijn (relatieve) bevolking, het nationale inkomen en bovendien nog het lieve vee!"

Door deze controverse kwam de Duitse statistiek in een crisis terecht. De hoogleraar in de filosofie en geschiedenis te Göttingen A.F. Lüder (1760–1819), die op statistisch gebied al enkele werken op zijn naam had staan, keerde zich in 1812 in zijn *Kritik der Statistik und der Politik* tegen het gehele vak. De statistiek noch de politiek, zo zei hij, hadden de belangrijke veranderingen aan het begin van de negentiende eeuw op politiek en economisch gebied kunnen verklaren. Lüder baarde veel opzien met deze publikatie omdat zijn kritiek van binnenuit, uit de statistische wereld zelf, kwam. Veel statistici keerden zich tegen hem en daarom reageerde hij met een volgende publikatie: *Kritische Geschichte der Statistik* (1817). De geschiedenis toonde volgens hem aan dat zijn visie op de statistiek de juiste was. Hij had nog enige clementie met statistici

FIGUUR 3. Lambert Adolphe Jaques Quetelet (1796–1874)

die zich op getallen baseerden. Dezen hadden immers gezorgd voor een betere inrichting van weduwenfondsen en dergelijke. Lüder keerde zich vooral tegen die statistici die zich hoog verheven voelden boven een getalsmatige benadering en die volgens hem daardoor bestaande gegevens negeerden, zich in speculaties verloren en hun aandacht van de hoofdzaken lieten afleiden. Daarentegen had hij op een andere plaats kritiek op de statistici, die alleen voor echt wilden aannemen wat te meten en te tellen was. Hoewel Lüder een geïsoleerde positie in de statistische wereld innam, illustreert zijn optreden dat de Duitse statistiek zich aan het begin van de negentiende eeuw in een kritieke fase bevond.

5. STATISTIEK VANUIT WISKUNDIGE HOEK: QUETELET

Al zou de weerstand tegen een dominantie van getallen en van wiskunde in de statistiek nog lang blijven bestaan, uiteindelijk zou deze ontwikkeling toch niet te keren zijn. Een krachtige impuls in deze richting kwam van iemand die uit een geheel andere traditie kwam dan de oorspronkelijke stastistici. Wij doelen op de Belgische *Lambert Adolphe Jaques Quetelet* (1796–1874). Was Kluit een alfa-wetenschapper, Quetelet was een wiskundige en dat verschil in achtergrond zou een rol spelen in hun uiteenlopende ideeën over de inhoud en de betekenis van statistiek.

Quetelet hield zich aanvankelijk, evenals Kluit, helemaal niet met statistiek bezig. Hij was gepromoveerd in de analytische meetkunde en begon zich daarna voor astronomie te interesseren. Hij wilde een observatorium in Brussel oprichten om astronomische waarnemingen te kunnen doen en kreeg in 1823 van de Nederlandse regering toestemming om in verband daarmeee een studiereis naar Parijs te maken. De Nederlandse regering moest daarvoor toen toestemming geven, omdat België van 1813 tot 1830 bij ons land hoorde.

In Parijs kwam Quetelet in aanraking met een heel nieuwe wereld en deze Parijse reis heeft een grote invloed op hem uitgeoefend. De beroemde wiskundigen Laplace, Poisson en Fourier zaten daar. Dezen hielden zich bezig met waarschijnlijkheidsrekening die hoofdzakelijk als foutentheorie in de astronomie werd gebruikt. Maar er waren daar toch ook al ontwikkelingen om de waarschijnlijkheidsrekening op geheel andere problemen toe te passen. Men had gemerkt dat in allerlei grote aantallen gegevens regelmatigheden kunnen worden ontdekt, die in verband kunnen worden gebracht met begrippen uit de waarschijnlijkheidsrekening. Bijvoorbeeld worden er gemiddeld iets meer jongens dan meisjes geboren, zodat gezegd kan worden dat de kans op de geboorte van een jongen iets groter is dan een half en van een meisje iets kleiner. Ook probeerde men er op grond van feitenmateriaal achter te komen, in welk geval iemand die van moord wordt beschuldigd een grotere kans had om vrijgesproken te worden: wanneer diens zaak behandeld werd door een rechtbank zònder of door een rechtbank mèt jury.

6. 'Neiging tot misdaad'

Toen Quetelet van deze reis terugkwam, is hij zich met kansrekening en de mogelijke toepassingen gaan bezighouden. Hij gaf er een college over voor een breed publiek, waaruit een boekje voortkwam, dat (vertaald) getiteld was: *Bevattelijk onderrigt in de kansrekening of de Leer der Waarschijnlijkheden.* Hij verzamelde gegevens die met het zedelijk peil van een land in verband kunnen worden gebracht: aantallen vondelingen en verwaarloosde kinderen, gegevens over rijkswerkinrichtingen, rijksgevangenissen, feiten afkomstig van rechtbanken en armenzorg. Quetelet was namelijk erg geïnteresseerd in gegevens over de 'mate van criminaliteit' van een bevolking. Deze belangstelling hing samen met zijn visie dat de 'morele kwaliteit' van een samenleving omgekeerd evenredig is met het aantal misdaden dat wordt gepleegd. Dat betekent dat men, als men inzicht in het morele gehalte van een samenleving wil verkrijgen, zich in principe tot de bestudering van de criminaliteit kan beperken. En daarover waren ten tijde van Quetelet statistische gegevens te verkrijgen. Quetelet liet zien dat het aantal moorden dat in een bepaald land wordt geregistreerd, elk jaar ongeveer gelijk is, en dat daarvan zelfs het aantal moorden dat op een bepaalde wijze wordt gepleegd, bijvoorbeeld door wurging, elk jaar vrijwel constant is. Hij interpreteerde dit met de veronderstelling dat binnen een groep mensen in een bepaald land een neiging tot misdaad, een 'penchant au crime', bestaat, die afhankelijk is van de leeftijd en het geslacht en die voor elke leeftijd kan worden bepaald door van een leeftijdsgroep het aantal personen dat een misdaad heeft gepleegd, te delen door het totaal aantal mensen van die groep. Dit levert dan een getal op dat hij als de 'neiging tot misdaad' van een willekeurige persoon van die leeftijd beschouwde. U kunt zich, denk ik, niet voorstellen, welke grote indruk het bestaan van een dergelijke wetmatigheid op de mensen uit die tijd heeft gemaakt. Hoe kan een verschijnsel als moord een wetmatigheid vertonen, namelijk dat er elk jaar vrijwel evenveel gepleegd worden? Moordenaars voeren toch geen overleg met elkaar over het te plegen aantal? Wat men nog veel onbegrijpelijker vond is, dat Quetelet ook liet zien, dat er elk jaar evenveel zelfmoorden worden gepleegd. Als toch iets door de vrije wil van de mens bepaald wordt, dan is dat toch wel de beslissing of men de hand aan zichzelf zal slaan, of niet.

7. Internationale statistische congressen

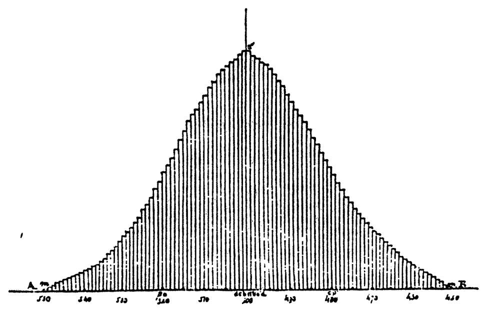
Quetelet verzamelde voor zijn studies statistische gegevens uit een groot aantal landen en merkte dat deze gegevens meestal niet of nauwelijks vergelijkbaar waren. Ze waren volgens verschillende criteria en categorieën verzameld en ingedeeld. Dit was voor hem de reden om het voortouw te nemen bij het organiseren van internationale statistische congressen, waarvan de eerste onder zijn voorzitterschap werd gehouden te Brussel in 1854. Er zijn acht van deze congressen geweest, waarvan ook één in Den Haag, in 1869. Deze internationale statistische congressen waren groots opgezet. Vele landen stuurden hun vertegenwoordigers, zowel uit de ambtelijke als uit de wetenschappelijke wereld. Tijdens zo'n bijeenkomst trachtte men eenheid te brengen in het verzamelen van gegevens in en over de diverse landen met het doel landen met elkaar te vergelijken, wat een oud ideaal uit de Duitse traditie was. Mede door Quetelets betrokkenheid bij deze congressen stond hij in contact met statistici die werkten in navolging van deze traditie. Quetelet probeerde te bereiken, dat deze mensen hun beschouwingen meer op betrouwbaar getallenmateriaal en zo mogelijk op waarschijnlijkheidsrekening zouden gaan baseren, en niet op "vage hypothesen en systemen zonder fundament". Zo heeft hij getracht van de statistiek een betrouwbare wetenschap te maken.

8. De normale verdeling

Quetelet noemde de foutenwet, die pas later de normale verdeling zou worden genoemd, ook wel de *wet van de toevallige oorzaken.* De waarde van een grootheid werd volgens hem bepaald door *constante* en *toevallige oorzaken.* De toevallige oorzaken die op een grootheid werken, hadden tot gevolg dat de waarden van deze grootheid waren onderworpen aan de foutenwet. De invloed van de toevallige oorzaken kon worden opgeheven door het bepalen van een groot aantal mogelijke waarden van die grootheid en deze waarden te middelen. Met de constante oorzaken was het anders gesteld, deze waren verantwoordelijk voor een vaste bijdrage aan de waarde van een grootheid. Ze konden alleen bestudeerd worden als de invloed van toevallige oorzaken was geminimaliseerd. Constante oorzaken waren bijvoorbeeld het geslacht of de leeftijd van een persoon. Verder onderscheidde Quetelet nog de *variabele oorzaken*, die met name voor *periodieke variatie* zorgden. Het bleek bijvoorbeeld dat het sterftecijfer aan periodieke variatie onderhevig was; deze was elk jaar het hoogst in februari en maart en het laagst in juni tot augustus.

In 1835 verscheen Quetelets belangrijkste werk *Sur l'homme et le développement de ses facultés. – Essai de physique sociale.* Hierin presenteerde hij vele statistische gegevens over zowel fysieke als morele kwaliteiten van de mens en liet zien dat veel van deze gegevens rond hun gemiddelde waren verdeeld volgens de foutenwet uit de astronomie, ofwel de normale verdeling. Hij was de eerste

GROUPES DE	RANG des groupes.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ du tirage de chaque groupe. Table A.	ÉCHELLE de précision. — SOMMES des probabilités à partir du groupe le plus probable. Table B.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ relative du tir. de chaque groupe. Table C.
499 boules blanches et 500 noires. .	1	0.025225	0.025225	1.000000
498 id. 501 id. . .	2	0.025124	0.050349	0.996008
497 id. 502 id. . .	3	0.024924	0.075273	0.988072
496 id. 503 id. . .	4	0.024627	0.099900	0.976285
495 id. 504 id. . .	5	0.024236	0.124136	0.960789
494 id. 505 id. . .	6	0.023736	0.147892	0.941764
493 id. 506 id. . .	7	0.023193	0.171085	0.919429
492 id. 507 id. . .	8	0.022552	0.193637	0.894040
491 id. 508 id. . .	9	0.021842	0.215479	0.865882
490 id. 509 id. . .	10	0.021069	0.236548	0.835261
489 id. 510 id. . .	11	0.020243.	0.256791	0.802506
488 id. 511 id. . .	12	0.019372	0.276163	0.767956
487 id. 512 id. . .	13	0.018464	0.294627	0.731958
486 id. 513 id. . .	14	0.017528	0.312155	0.694860
485 id. 514 id. . .	15	0.016573	0.328728	0.657008
484 id. 515 id. . .	16	0.015608	0.344335	0.618736
483 id. 516 id. . .	17	0.014640	0.358975	0.580364
482 id. 517 id. . .	18	0.013677	0.372652	0.542107
481 id. 518 id. . .	19	0.012726	0.385378	0.504516
480 id. 519 id. . .	20	0.011794	0.397172	0.467376
479 id. 520 id. . .	21	0.010887	0.408060	0.431609
478 id. 521 id. . .	22	0.010008	0.418070	0.396815
477 id. 522 id. . .	23	0.009166	0.427236	0.363366
476 id. 523 id. . .	24	0.008360	0.435305	0.331407



FIGUUR 4. *a.* Een deel van Quetelets tafel, waarmee hij de normale verdeling benaderde met behulp van een symmetrische binomiale verdeling. *b.* Quetelets benadering van de normale verdeling. Hiervoor gebruikte hij de gegevens van de vorige tabel.

die deze foutenwet gebruikte voor de variabiliteit in de natuur, waardoor de wet een veel bredere toepassing en betekenis kreeg dan alleen de kansverdeling van meetfouten, waarvoor hij tot dan toe in de sterrenkunde werd gebruikt. Ook de natuurlijke variabiliteit bleek te zijn onderworpen aan deze kansverdeling. Quetelet dacht dat alle in de natuur optredende waarden van een of andere grootheid de curve van de normale verdeling volgen. Wanneer een verzameling gegevens niet volgens deze curve was verdeeld, hoorden ze niet bij elkaar en waren het geen waarden van dezelfde grootheid. En andersom, wanneer gegevens van een aantal individuen waren verdeeld volgens de normale curve, dan waren die gegevens homogeen. De betreffende individuen konden dan als één groep worden beschouwd.

9. DE GEMIDDELDE MENS

Quetelet had de beschikking over meetresultaten van de borstomvang van een aantal Schotse soldaten. Deze grootheid was volgens Quetelet gemodelleerd volgens de ideale borstomvang van de Schotse soldaat, die de waarde van het gemiddelde van de gemeten borstomvangen had. Dit in analogie met de astronomie waar men het gemiddelde beschouwde als de beste benadering van de werkelijke waarde van de gemeten grootheid. Voor Quetelet bestond er dus ook voor de borstomvang van een Schotse soldaat zoiets als een werkelijke waarde. Hij definieerde de *gemiddelde mens* ofwel *l'homme moyen* als de mens waarbij alle te onderscheiden grootheden een gemiddelde waarde hadden. Deze beschouwde hij als het ideaaltype mens. Omdat hij deze mens als het *zwaartepunt van de maatschappij* beschouwde, zou die het onderwerp van studie moeten zijn in een nieuwe wetenschap die hij *sociale fysica* noemde. Kennis van de gemiddelde mens zou inzicht in de mensheid en de maatschappij opleveren. De sociale fysica, die dus de gemiddelde mens als studieobject zou hebben was in essentie een statistisch georiënteerde wetenschap, want het onderwerp van studie, de gemiddelde mens, was een statistisch bepaald begrip.

Hoewel Quetelet niet ontkende dat ook aandacht moest worden besteed aan hetgeen afwijkt van het gemiddelde, heeft hij dat niet zelf gedaan. Om zijn idee van gemiddelde mens duidelijk te maken vergeleek hij deze wel eens met een beeld. De mensen die werkelijk bestaan beschouwde hij als copieën van dit beeld. Deze copieën vertonen natuurlijk afwijkingen van het origineel dat de ideale vorm bezit. Door op deze manier te redeneren, zette hij het middelmatige van een mens op een voetstuk en bagatelliseerde hij het bijzondere. De normale verdeling en het gemiddelde kregen zowel een normatieve als een esthetische lading. U kunt zich waarschijnlijk wel voorstellen, dat, ondanks de vele bewondering die Quetelet ten deel is gevallen, dit aspect van zijn opvattingen ook veel kritiek heeft ondervonden. Zo schreef de hoogleraar in de statistiek Anthony Beaujon in 1884 spottend het volgende over Quetelets gemiddelde mens: "die zich in eene beroemdheid verheugt welke menig werkelijk sterveling hem zou kunnen benijden, en wel juist omdat hij, zoo wij hem in vleesch en been konden ontmoeten, niets aan zich hebben zou, dat hem beroemd of berucht kon maken." Beaujon vond dat Quetelet als statisticus buiten zijn boekje was gegaan door de gemiddelde mens als volmaakt te beschouwen.

10. De twee werelden

Al heel lang is men er zich van bewust dat er twee werelden zijn, waartussen een kloof bestaat die bijkans onoverbrugbaar schijnt: de alfa- en de bèta-wereld. Het bijzondere van Quetelet was dat hij als bèta-wetenschapper zich interesseerde voor statistiek of 'statenkunde', wat toen, zoals we bij Kluit hebben gezien, nog een alfa- domein was. Op deze wijze wist hij een brug tussen beide werelden te slaan. In Nederland is dit voorbeeld echter niet nagevolgd. Er is in Nederland in de negentiende eeuw één wiskundige geweest, die zich voor statistiek en waarschijnlijkheidsrekening interesseerde en daar met Quetelet over correspondeerde. Deze hoogleraar te Delft, Rehuel Lobatto, die een wiskundige in hart en nieren was, respecteerde Quetelet in hoge mate. Hij schreef Quetelet eens, dat hij hem juist zo bewonderde omdat Quetelet met evenveel succes zeer verschillende mogelijke toepassingen van de exacte wetenschappen behandelde. Daarbij dacht hij met name aan het werk dat Quetelet aan de 'morele' statistiek had gedaan. Het is duidelijk dat Lobatto aanvoelde dat Quetelet iets kon, waartoe hij zichzelf niet in staat achtte: het aanbrengen van een brug tussen de alfa- en de bèta-wereld.

Quetelet wist door zijn veel exactere achtergrond dan de andere statistici de statistiek nieuwe impulsen te geven. Bij Quetelet was de overgang van woorden naar waarden gemaakt. De ontwikkeling was zelfs nog verder gegaan; kansrekening ging een centrale rol spelen bij het samenvatten en interpreteren van kwantitatieve gegevens. Het centrale concept daarbij was de normale verdeling. Dat wil niet zeggen dat dat voor iedereen ten tijde van Quetelet het geval was. In Nederland zou het voorlopig nog anders zijn. In de *Vereeniging voor de Statistiek*, die in 1857 zou ontstaan, stonden de opvattingen over statistiek nog lang in de Duitse traditie.

11. "Aliis Exterendum", om door anderen "gelezen" te worden

In Engeland was eerder dan in Nederland sprake van een statistische organisatie, namelijk reeds in 1834. Daarbij was Quetelet betrokken geweest. Het begon in 1831. In dat jaar werd de 'British Association for the Advancement of Science' opgericht. Deze organisatie wilde Engelse natuurwetenschappers jaarlijks in de belangrijkste provinciesteden bij elkaar brengen om van gedachten te wisselen over recente natuurwetenschappelijke ontwikkelingen. In 1833 hield ze haar derde bijeenkomst in Cambridge. Quetelet was uitgenodigd om als officiële Belgische afgevaardigde aan het congres deel te nemen. Hij wilde een lezing geven over de resultaten van zijn statistische onderzoekingen van zelfmoord en misdaad, maar in geen van de secties van de vereniging paste dit onderwerp. Er waren op het congres wel verschillende geleerden geïnteresseerd in Quetelets onderwerp, waaronder Malthus en de wiskundige Charles Babbage. Deze kwamen op een avond bijeen om naar Quetelet te luisteren en richtten toen een statistische sectie op. De voorzitter van de British Association stelde een drietal voorwaarden aan de nieuwe sectie. Zij moest zich verre houden van de "akelige wereld van de politiek", verder moest de nieuwe sectie zich beperken tot "feitelijke aangelegenheden (...) met numerieke resultaten", terwijl de "hogere generalisaties" van politieke economie en politieke filosofie waren verboden.

Degenen die waren betrokken bij de oprichting van de nieuwe sectie van de British Association, waren bijna allen afkomstig uit Londen. Bij hen ontstond al gauw de behoefte aan een Londense vereniging. Babbage nam, samen met enkele anderen, het initiatief en in 1834 werd de London Statistical Society opgericht. Op de eerste bijeenkomst werd het volgende uitgesproken: "accurate kennis van de maatschappelijke omstandigheden en vooruitzichten (.....) is een doel van groot nationaal belang dat niet kan worden verkregen zonder een zorgvuldige verzameling en classificatie van Statistische feiten." De statistiek moest dus de maatschappij als haar onderwerp van studie beschouwen en daartoe statistische feiten verzamelen. De statistiek werd niet gedefinieerd door haar methode, maar door het onderwerp waarmee ze zich bezighield. Als motto van de vereniging werd gekozen "Aliis Exterendum", hetgeen betekent: om door anderen "gelezen" te worden. Met dit motto wilde men tot uitdrukking brengen dat men vond dat statistiek zich diende te beperken tot het verzamelen van feiten en zich niet behoorde te wagen aan interpretatie en aan theoretisering. Deze bepaling kwam voort uit de vrees dat de vereniging zou worden gebruikt om politieke opvattingen te propageren. Men was er zich blijkbaar wel van bewust dat statistiek maar al te makkelijk gebruikt kan worden om

FIGUUR 5. "Aliis Exterendum", het logo van de Statistical Society of London (1838–1857).

iemands al of niet verborgen eigen doeleinden na te streven.

In 1838 werd begonnen met het uitgeven van een eigen tijdschrift, de *Journal of the Statistical Society of London.* Uit de onderwerpen die werden behandeld op de bijeenkomsten van de vereniging blijkt, dat men een grote belangstelling had voor economisch-statistische onderwerpen, en dat er bovendien grote aandacht bestond voor sterfte- en gezondheidsstatistiek. Dat statistiek uit getallen behoorde te zijn opgebouwd, achtte men op een bepaald moment wel vanzelfsprekend, echter de rol van de wiskunde bleeft vooralsnog beperkt. Dit wordt onder meer geïllustreerd door een lijst van onderwerpen die voor de toekomst van de statistiek wenselijk zouden zijn, opgesteld in 1869 door W. Newmarch, de toenmalige voorzitter van de vereniging. Onderzoek naar de wiskunde en de logica van statistische bewijsvoering kwam op de achttiende en laatste plaats. In Engeland verstond men toen blijkbaar onder statistiek hetgeen wij nu met beschrijvende statistiek aanduiden.

12. WISKUNDE EEN VAK DAT ALLEEN INZET VERGT

Iemand die als een representant van deze opvatting van statistiek kan worden beschouwd is Florence Nightingale (1820–1910). U weet misschien wel dat deze Engelse dame wordt gekarakteriseerd als: *The Lady with the Lamp*, die de gewonde soldaten bij nacht en ontij liefdevol verzorgde: "In that place of misery, a lady with a lamp I see". Maar dat ze ook wel *a passionate statistician* is genoemd, dat zal voor velen van u toch waarschijnlijk nieuw zijn. Om dat laatste gaat het ons, maar om enig inzicht te hebben waarom ze statistiek zo belangrijk vond en waarom haar statistische bijdragen in die tijd indruk maakten, zullen we nagaan hoe ze zo bekend geworden is.

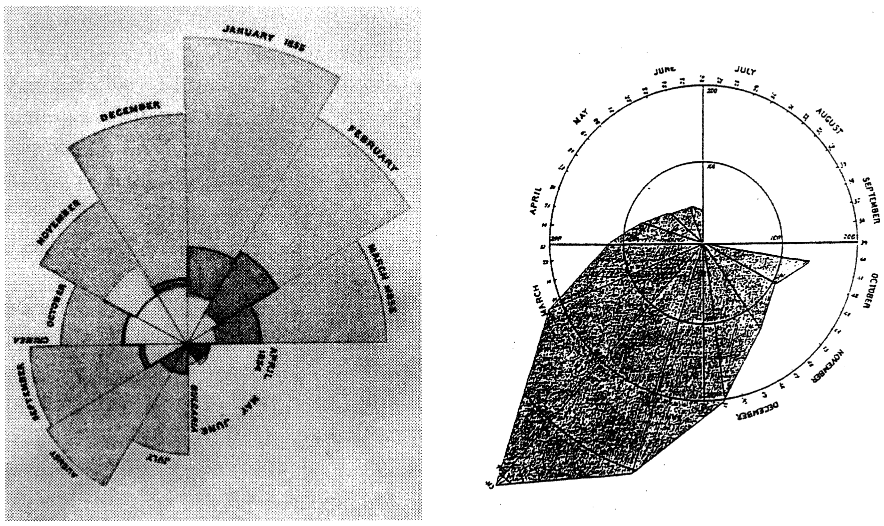
Ze was de tweede en laatste dochter van de zeer bemiddelde Fanny en William Nightingale, die behoorden tot de hoogste Engelse kringen. Omdat vader William geen goede huisonderwijzer kon vinden, besloot hij zijn twee dochters zelf onderwijs te geven. Ze kregen behalve meerdere talen en andere vakken ook enige wiskunde onderwezen. Florence ontwikkelde een passie voor het ver-

FIGUUR 6. Florence Nightingale (1820–1910)

zamelen van feiten, met name intrigeerden haar cijfermatige gegevens. Toen ze twintig jaar was, wilde ze zich verder in de wiskunde verdiepen dan haar vader haar kon leren. Haar motivatie voor de keuze van wiskunde is trouwens niet zo vleiend voor dit vakgebied: "Ik denk dat ik meer succesvol zal zijn in een vak dat alleen inzet vergt dan in een vak dat een snel begrip verlangt." Echter, van een meisje van haar leeftijd en stand werden andere dingen verwacht: huiselijke plichten, zoals het afleggen van bezoeken, het leren converseren, het schikken van bloemen en het deelnemen aan feestelijke bijeenkomsten, kortom, het zich voorbereiden op het huwelijk. Ze moest het daardoor grotendeels van zelfstudie hebben. Ze studeerde in de vroege ochtenduren, wanneer haar nog geen huiselijke plichten werden opgelegd.

Enkele jaren eerder was het haar duidelijk geworden dat ze niet voor een 'gewoon' getrouwd bestaan bestemd was. Ze formuleerde het zelf als volgt: "Op 7 Februari, 1837, sprak God tot mij en riep mij tot Zijn dienst". In de loop van de jaren raakte ze er van overtuigd, dat haar bestemming lag in het verlichten van het lijden van de ellendigen in de wereld. Ze wilde verpleegster worden, maar daarvoor vond ze al helemaal geen gehoor bij haar ouders. Verpleegsters hadden toen een slechte naam. Er gingen vele jaren voorbij, jaren waarin ze zich zeer ongelukkig voelde. Studeren kon ze wel. Ze voorzag zich van de benodigde literatuur en verdiepte zich in het ziekenhuiswezen. Ze deed in deze periode zoveel kennis op, dat ze daar later nog veelvuldig van kon profiteren. In 1853 nam ze het iniatief tot het ontwerpen van een vragenlijst voor een aantal ziekenhuizen in Europa betreffende hun statistische gegevens over ziekte en sterfte. Deze stuurde ze rond en ze verwerkte en analyseerde de ontvangen gegevens, waardoor haar kennis over de omstandigheden in ziekenhuizen nog groter werd.

Het einde van het gedwongen verblijf bij haar ouders kwam nu in zicht. Ze was intussen 33 jaar. In 1853 werd ze via een invloedrijke vriendin uitgenodigd om directrice te worden van een ziekenhuis voor dames. Ze had eindelijk een



FIGUUR 7. Twee door Florence Nightingale ontworpen sterftediagrammen. *a.* Het aantal sterfgevallen in de Britse militaire hospitalen in elke maand. De buitenste oppervlakken (oorspronkelijk blauw gekleurd) zijn evenredig met de sterfteaantallen als gevolg van besmettelijke ziekten, zoals cholera of tyfus. De middelste (rose) oppervlakken zijn evenredig met de sterfteaantallen door wonden en de binnenste (grijs) met de rest van de sterfte. *b.* De maandelijkse sterfte in het hospitaal te Scutari als fractie van de patiëntenpopulatie. De sterfte daalde sterk, nadat in maart 1855 hygiënische maatregelen waren genomen.

meer bevredigende taak in haar leven gevonden.

13. STERFTE DOOR BESMETTELIJKE ZIEKTEN

Toen brak de oorlog in de Krim uit, waarbij de Engelsen en de Fransen de kant van de Turken kozen tegenover de Russen. Enkele Engelse legereenheden werden naar de Krim gestuurd. Voor het eerst in de geschiedenis ging er een oorlogscorrespondent mee. Die wist met zijn regelmatig verschijnende artikelen in de Times de publieke opinie in Engeland danig te beïnvloeden. Via hem vernam men over de slechte omstandigheden aan het front. De sterfte onder de soldaten was zeer groot, omdat er geen behoorlijke medische verzorging was en omdat de logistiek zich op een bedenkelijk laag peil bevond. De discussies in het Lagerhuis laaiden hoog op en de minister van oorlog kreeg de opdracht een groep verpleegsters te sturen. Hij vroeg toen Florence om deze missie te organiseren en te leiden en voorzag haar van verregaande bevoegdheden.

Ze kreeg met moeite op korte termijn een groep van 38 verpleegsters bij elkaar en vertrok naar Scutari, nabij Constantinopel, waar de ziekenhuisbarakken van het Engelse leger zich bevonden. De periode die ze toen tegemoetging, heeft een diepgaande en beslissende indruk op haar gemaakt. Ze kwam in een verschrikkelijke situatie terecht. De gewonden misten zelfs de meest noodzakelijke verzorging. De barakken waren over- en overvol en steeds werden er patiënten aangevoerd. Er heersten besmettelijke ziekten. De sterfte was enorm.

Om anderen te overtuigen van de noodzaak van bepaalde veranderingen en ook voor zichzelf om inzicht in de situatie te krijgen, maakt ze gebruik van statistische gegevens die ze zelf verzamelde. Op basis daarvan kon ze naderhand met behulp van figuur 7a laten zien dat de sterfte in de militaire hospitalen grotendeels werd veroorzaakt door besmettelijke ziekten als cholera en typhus. Nadat ze hygiënische maatregelen had genomen, daalde de sterfte enorm, hetgeen ze overtuigend illustreerde met behulp van figuur 7b.

Toen de oorlog afgelopen was, ging ze terug naar Engeland. Ze was uitgeput en ziek en zou haar verdere leven invalide blijven. Ze voelde zich echter geroepen om zich voor de Britse soldaat te blijven inzetten. Hierbij maakte ze gebruik van haar kontakten en vriendschappen met invloedrijke politici, want ze heeft nooit een officiële (betaalde) functie gehad. Dat was voor een vrouw van haar stand in die tijd niet weggelegd. Ze wist daarentegen grote invloed uit te oefenen op informele wijze, door de vele kontakten die ze voor een deel al in haar jeugd had opgebouwd en verder door de publieke opinie rond haar persoon. Zelfs de koningin heeft ze meerdere keren ontmoet en Florence Nightingale wist ook haar voor de zaak te winnen. Ze wist gedaan te krijgen dat er in 1857 een commissie werd ingesteld die de hele kwestie van de medische hulp aan soldaten zou onderzoeken. En al was ze geen lid, ze was zeer direkt betrokken bij het werk ervan. Ze leverde materiaal bij de samenstelling van de rapporten. Echter, in 1860 stierf haar dierbare vriend, de minister van oorlog. Haar invloed binnen het ministerie van oorlog werd aanzienlijk minder. Ze is zich toen met andere kwesties gaan bezighouden en is uiteindelijk teruggekeerd naar het thema waarmee het allemaal begonnen was: het ijveren voor de instelling van een gewaardeerd verpleegstersberoep. In dat kader heeft ze een opleidingsschool voor verpleegsters in het leven geroepen.

14. Statistiek de belangrijkste wetenschap

Een belangrijk middel waarvan ze gebruik maakte was dus de statistiek. In een verslag van het Internationale Statistische Congres in 1860 te Londen, geschreven door de Nederlandse prof. Quack, is het volgende te lezen:

> "De tweede sectie (...) behandelde de gezondheidsstatistiek. (...). Onder de ingekomen stukken bevond zich ook een brief (...), geschreven door Florence Nightingale. (...) Zij wees op den invloed van een goed sanitair regime bij de troepen. Alles, wat de gezondheid bevorderde, moest volgens haar overal worden opgemerkt en waargenomen (...). Men moest ten allen tijde en overal met cijfers aantoonen, dat de uitgaven ter verbetering en voorkoming van zulke toestanden zooveel minder zijn dan de uitgaven, die door de ziekten en misdaden zelf veroorzaakt worden. - Die brief van de edele vrouw, de heldin der zelfopofferende liefde, wekte (...) een waar enthousiasme op, en de naam van Florence Nightingale werd door al die statistici (...) met een hulde en vereering

> begroet, als wilde de met cijfers bedekte negentiende eeuw aantoonen, dat, waar de vrouw in haar edelste verschijning tot die droge tabellen naderde, er bij haar tred een waas van poëzie, een zoete geur zelfs over muffe cijfers werd uitgegoten. Het spreekt vanzelf dat Florence's voorstellen door het congres werden aangenomen en aanbevolen."

De schrijver karakteriseerde de eeuw waarin hij leefde als "De met cijfers bedekte negentiende eeuw". In de negentiende eeuw was er een heilig geloof in de kracht van getallen. Dit geloof in getallen zien we ook bij Florence Nightingale. Omdat ook anderen zich in die tijd graag door dergelijke redeneringen lieten overtuigen, had haar statistische argumentatie een grote overtuigingskracht. In dat opzicht was ze dus een echt kind van haar tijd en heeft ze gebruik gemaakt van de middelen die in die tijd het meest effektief waren.

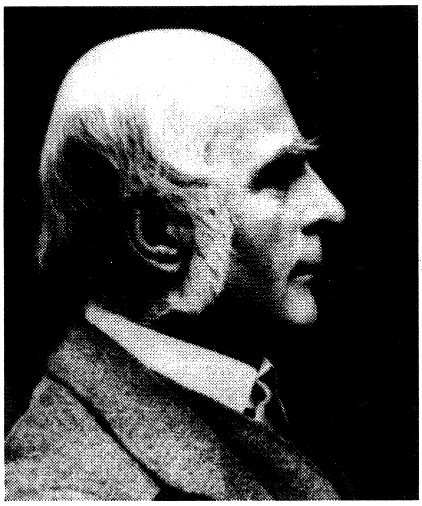
Wel onderscheidde ze zich van een belangrijke Engelse statisticus uit die tijd, genaamd William Farr, met wie ze trouwens veel heeft samengewerkt. Hij vond van statistische gegevens; "hoe droger hoe beter" en "Statistiek moet het droogste zijn van alles wat gedoceerd wordt". Zìj was er daarentegen steeds op uit om die statistische gegevens zo 'niet-droog' mogelijk te presenteren. Ze wilde dat een groter publiek dan alleen wetenschappers met één oogopslag konden zien, wat ze met haar statistische gegevens wilde aantonen. Bij haar was statistiek echt een middel, geen doel; het doel was bijv. het bereiken van verbeteringen in de medische voorzieningen van soldaten. Vandaar dat zij zich heeft ingespannen om deze statistische gegevens zo inzichtelijk mogelijk grafisch te presenteren, waarbij ze dus ook van verschillende kleuren gebruik heeft gemaakt. Daarmee was ze voor die tijd vernieuwend bezig.

Statistiek was voor haar echter nog meer dan een belangrijk instrument. Ze gelóófde in statistiek. Ze zei dat statistiek "de belangrijkste wetenschap is van de hele wereld; want van haar hangt af de praktische toepassing van elke andere wetenschap: het is de enige wetenschap die essentieel is voor elk politiek en sociaal bestuur, elk onderwijs, en elke organisatie gebaseerd op ervaring, want alleen dit vak levert exacte resultaten van onze ervaring op."

Verder geloofde ze dat statistiek de morele wetten in de maatschappij kon blootleggen. In deze opvattingen is de invloed van Quetelet waar te nemen. Florence Nightingale bewonderde hem zeer en heeft uitgebreid met hem gecorrespondeerd. Voor haar had het zoeken naar dergelijke wetten bovendien een religieus aspekt. Op deze wijze kon je immers het Plan van de Opperste Wijsheid en Goedheid ontdekken.

15. Francis Galton: whenever you can, count

Voor Florence Nightingale was statistiek dus ongeveer wat wij nu onder beschrijvende statistiek verstaan, waarbij ze op innoverende wijze van grafische voorstellingen gebruik maakte. De overgang van woorden naar waarden had zich voltrokken. En dat was voor haar doeleinden bevredigend. Toch gold het niet alleen voor het getal dat daarvan de opmars niet te stuiten was, hetzelfde zou uiteindelijk ook met de kansrekening gebeuren. Quetelet had de eerste pogingen gedaan. Die sloegen echter voorlopig nog niet bij de toenmalige sta-



FIGUUR 8. Francis Galton (1822–1911)

tistische wereld aan. Al bewonderden de statistici hem hogelijk, veel navolging in zijn pogingen de statistiek te 'probabiliseren' had hij in die kringen niet. In Francis Galton (1822–1911) zou hij wel een waardige opvolger krijgen. Door diens bijdragen zou er een nieuw vakgebied onstaan, waarin wij naderhand het begin van de mathematische statistiek zijn gaan zien.

Galton heeft nooit een betaalde baan gehad. Dat was niet nodig want hij kwam uit een rijke familie van zakenmensen en bankiers. Hij moet een opvallend jongetje zijn geweest, want er wordt van hem gezegd dat hij al kon lezen toen hij tweeënhalf jaar oud was en verder dat hij wel een IQ van 200 gehad moet hebben. Hij was geen wiskundige, maar had wel een wiskundig georiënteerde geest. En hij was geobsedeerd door getalsmatige informatie, waarschijnlijk nog meer dan Florence Nightingale. Eén van zijn lijfspreuken was "whenever you can, count". Zo liet hij allerlei metingen aan de mens doen, van hoofdomvang tot oogkleur. Ook rekende hij van iemand die een lezing hield wel eens een zogenaamde vervelingscoëfficient uit. Hij baseerde dat getal dan op het gedrag van de toehoorders tijdens zo'n lezing. Hij was ook in de schoonheid van de vrouw geïnteresseerd. Zo schijnt hij altijd een plankje bij zich gehad te hebben, waarop hij de score van de schoonheid van de vrouwen die hij tegenkwam, kon aangeven. Op grond daarvan was hij tot de conclusie gekomen dat in Engeland de Londense vrouwen het mooist en de vrouwen van Aberdeen het lelijkst waren.

Galton bouwde voort op het werk van Quetelet. Quetelet had laten zien dat de foutenkromme uit de astronomie ook kon worden gebruikt om biologische variatie te beschrijven. Op deze wijze had de foutenkromme een veel groter toepassingsgebied gekregen. Echter de visie van Quetelet op deze kromme was daardoor niet wezenlijk veranderd. Hij beschouwde immers 'de gemiddelde mens' als het zwaartepunt van de samenleving, alles wat niet de gemiddelde waarde had moest als een afwijking van het ideale worden beschouwd. Galton nam kennis van het werk van Quetelet en was enthousiast over diens toepassing van kanstheorie en diens bredere gebruik van de foutenkromme. Ook Galton merkte op dat vele menselijke eigenschappen volgens de Gauss-kromme verdeeld zijn. Echter hij was het geheel oneens met de interpretatie ervan. Hij schreef daarover: "De belangrijkste doelen van de foutenkromme van Gauss waren, in een bepaalde betekenis, precies tegengesteld aan waarop ik ze toepaste. Zij waren bestemd om zich van fouten te ontdoen, of de invloed ervan binnen de perken te houden. Echter, deze fouten of afwijkingen waren nu juist de dingen, die ik wilde bewaren en meer van wilde weten."

Galton beperkte de toepassing van de normale verdeling niet tot biologische menselijke gegevens. Lang voordat IQ-testen waren ontwikkeld, was Galton al tot de conclusie gekomen dat intelligentie de normale verdeling moest volgen. Hij bracht dat in 1869 als volgt onder woorden: "Dit is waar ik heen wil - dat analogie laat zien dat er bij de bewoners van de Britse eilanden een tamelijk constant gemiddeld mentaal vermogen moet zijn, en dat afwijkingen van dit gemiddelde - omhoog in de richting van genialiteit en omlaag naar domheid - aan de wet gehoorzamen die de afwijkingen van alle echte gemiddelden regeert."

Zijn grote belangstelling voor intelligentie ging gepaard met, in onze hedendaagse ogen controversiële, standpunten. Zo was hij van mening dat Engelse vrouwen één standaarddeviatie dommer waren dan Engelse mannen, negers twee standaarddeviaties en Australische inboorlingen zelfs drie. De suggestie kan nu gewekt zijn, dat Galton vond dat hij behoorde tot de meest intelligente mensen die ooit hadden bestaan. Dat is niet helemaal waar; hij beschouwde de intelligentie van de burgers van het illustere oude Athene als, zoals hij schreef: "vrijwel twee standaarddeviaties hoger dan de onze - dat is ongeveer evenveel als ons ras zich boven dat van de Afrikaanse neger bevindt." In die tijd was de mening vrij algemeen, dat het blanke Europese ras superieur was. Wat dat betreft was het niet schokkend wat hij beweerde. Het bijzondere van Galton was de wijze waarop hij de (voor)oordelen uit die tijd onder woorden bracht: in statistische termen. Dat was toen wèl nieuw. En omdat hij leefde in de 'met cijfers bedekte negentiende eeuw' ging er van een dergelijke formulering een grote kracht uit.

16. Regressie en correlatie

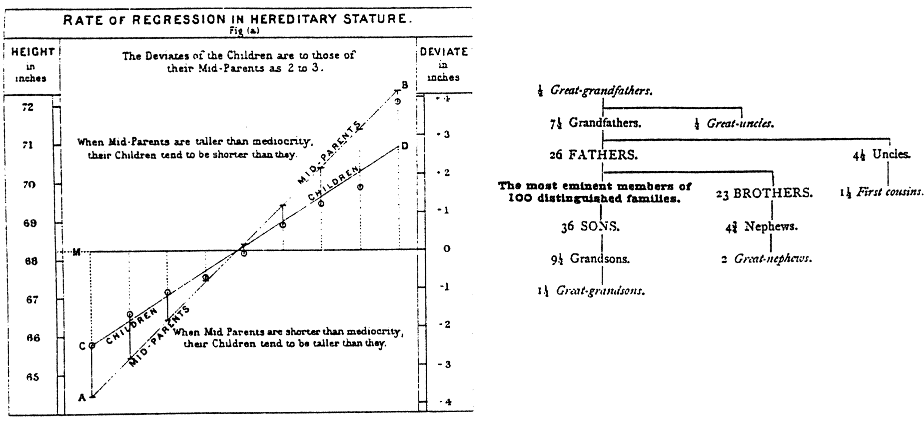
Evenals voor Florence Nightingale was zijn interesse voor de statistiek een gevolg van belangstelling voor iets anders. Zijn primaire belangstelling ging uit naar evolutie en erfelijkheid. Hij was onder de indruk van de ideeën van zijn oom, Charles Darwin, die in 1859 de evolutietheorie had geformuleerd. Hij was daardoor geheel overtuigd dat het huidige planten- en dierenrijk (inclusief de mens) door evolutie was ontstaan. Galton dacht erover na hoe de evolutie kon zijn verlopen en welke erfelijkheidswetten daaraan ten grondslag zouden hebben gelegen. Darwin had de natuurlijke selectie als noodzakelijke voorwaarde van de evolutie aangewezen. Galton was dit geheel met hem eens, maar vond dat deze natuurlijke selectie bij de mens niet meer voldoende functioneerde. Hij was daarom een voorstander van eugenetische maatregelen van rasverbetering:

Intelligente ouders zouden meer kinderen moeten krijgen dan zwakbegaafden. Hij had een duidelijk standpunt in de diskussie die nog altijd voortduurt van 'nature versus nurture'. Hij was van mening dat erfelijkheid een veel bepalender rol speelde bij de vorming van een bepaalde eigenschap dan opvoeding en opleiding en probeerde aan de hand van getallen zijn standpunt in het nature-nurture debat te onderbouwen.

Galton vond het dus belangrijk om zijn overtuigingen met empirisch materiaal te onderbouwen. Maar hoe kwam hij aan die gegevens? Het ging hem om gegevens van menselijke verschijnselen, maar aanvankelijk zag hij geen kans om die te verzamelen. Daarom nam hij zijn toevlucht tot lathyruszaden. Ook die konden kennis over erfelijkheid opleveren. Hij maakte groepjes van zaden met hetzelfde gewicht, dus zowel relatief lichte als relatief zware zaden. Deze stuurde hij naar verschillende vrienden met het verzoek ze te zaaien, er weer zaad van te winnen en dat nieuwe zaad dan weer naar hem terug te sturen. En zo geschiedde. Galton woog al die zaden van de nakomelingen en hij merkte op dat, gemiddeld genomen, de zaden van de zeer lichte ouderzaden dan wel niet zo licht waren dan die van de ouders, maar wel lichter dan het gemiddelde van alle zaden. Voor de zwaardere zaden gold dat het nageslacht zaden opleverde die zwaarder waren dan het gemiddelde van het totaal, maar wel lichter dan de ouderzaden. Dit verschijnsel zou later *regressie naar het gemiddelde* genoemd worden. Toen hij later dit verschijnsel ook bij de lengte van mensen opmerkte, moest hij er wel rekening mee houden dat mensen twee ouders hebben. Daartoe definieerde hij de 'mid-parental height': het gemiddelde van de lengte van de vader en 1.08 keer de lengte van de moeder. Ook bij deze grootheid trad regressie naar het gemiddelde op: de kinderen van heel kleine ouders waren wel klein, maar in het algemeen niet zo klein als hun ouders (zie Figuur 8a).

Galton had een mooi plan bedacht om aan deze menselijke gegevens te komen. Op de Internationale Gezondheids Tentoonstelling, die in 1884 in South Kensington werd gehouden, had Galton een laboratorium ingericht. Tegen een kleine vergoeding konden de bezoekers van alles aan zich laten meten: lengte, gewicht, gehoor, gezicht, gevoel voor kleuren, ademhalingskracht, spanwijdte van de armen enz.. Meer dan 9000 mensen wist hij tot meedoen te bewegen. Een enorme dataverzameling leverde dat op, waaraan hij veel van zijn ideeën kon toetsen.

Verder verkreeg Galton veel informatie over familiestambomen door prijzen uit te loven voor degenen die ze het best hadden bijgehouden. Ook zelf had hij al vele gegevens verzameld, met name over belangrijke Engelse families, waarin veel (volgens hem) eminente mensen voorkwamen. Omdat hij in erfelijkheid was geïnteresseerd en vooral in de erfelijkheid van mentale kenmerken ging hij na in hoeverre bij eminente mannen die eminentie ook bij de zonen, de vaders, de broers en bij verdere mannelijke familieleden voorkwam. Het resulaat was dat, wanneer je 100 eminente mannen had opgespoord, hiervan er 26 ook een eminente vader moesten hebben gehad, 23 een eminente broer hadden en 36 een eminente zoon (zie Figuur 8b). Dat vrouwen ook eminent kunnen zijn is blijkbaar nooit in Galtons hoofd opgekomen; schoonheid was wel een kenmerk die vrouwen konden bezitten, eminentie niet.



FIGUUR 9. *a.* Galtons grafische illustratie van regressie; de cirkels geven de gemiddelde lengte weer van groepen kinderen van wie de "mid-parental height" op de lijn AB ligt. Het verschil tussen de lijn CO en AB geeft de regressie naar het gemiddelde weer. *b.* Galtons illustratie van hoe het percentage eminente mannen afneemt als de afstand tot de meest eminente man in de familie toeneemt.

U kunt zich misschien wel voorstellen dat een interesse in de erfelijkheid van menselijke kenmerken, samen met een grote behoefte om verschijnselen in getallen weer te geven tot het zoeken naar een of andere correlatiemaat kan leiden. Nu heeft Galton zelf niet de ons bekende definitie van de correlatiecoëfficient gegeven, maar het idee van correlatie is wel van hem afkomstig. Al was Galton niet in staat deze concepten wiskundig te formuleren, de statistiek was intussen zo gekwantificeerd en gemodelleerd dat dit zijn leerling Karl Pearson wel lukte. Deze was behalve een eugeneticus ook een knap wiskundige. Pearson heeft de ideeën van zijn 'eminente' leermeester geformaliseerd en in wiskundige taal gegoten. Hij richtte in 1901 het tijdschrift Biometrika op. In de inhoud van dit tijdschrift herkennen wij het begin van de mathematische statistiek. Maar dan zijn we in de twintigste eeuw aangeland.

Slotopmerking: we hebben gezien dat professor Quack in 1876 zijn eeuw karakteriseerde als "de met cijfers bedekte negentiende eeuw". Quack was niet de enige die de negentiende eeuw op een dergelijke wijze heeft gekarakteriseerd. Aan het einde van de eeuw was er een geleerde, een zekere J.T. Merz, die een uitgebreide geschiedenis schreef van het Europese denken in die eeuw. Hierin is een lang hoofdstuk opgenomen met de titel "Over de statistische kijk op de natuur". Hierin zegt hij "in feite mogen we onze eeuw -in onderscheid met eerdere eeuwen- karakteriseren als de eeuw van de statistiek". In de negentiende eeuw ging er daarom van statistische argumentaties een grote overtuigingskracht uit. Deze karakterisering van de negentiende eeuw wordt door de snelle ontwikkeling van de mathematische statistiek in de twintigste eeuw maar al te makkelijk over het hoofd gezien.

VERANTWOORDING
Bij het schrijven van dit artikel is onder meer gebruik gemaakt van reeds bestaande teksten, in het bijzonder van de teksten die als de nummers 8 en 9 in de literatuurlijst zijn opgenomen.

LITERATUUR

1. I.B. Cohen, "Florence Nightingale", *Scientific American* 250 (3) (March 1984), blz. 98–107.
2. M. Diamond and M. Stone,"Nightingale on Quetelet" (Part 1), *Journal of the Royal Statistical Society A* 144, (1981), blz. 66- 79.
3. G. Gigerenzer et al., *The empire of chance. How probability changed science and everyday life* (Cambridge, Cambridge University Press, 1989).
4. I. Hacking, em The taming of chance, (Cambridge: Cambridge University Press, 1990).
5. D.A. MacKenzie, *Statistics in Britain 1865–1930, The social construction of scientific knowledge* (Edinburgh: Edinburgh University Press, 1981), blz. 51-72.
6. T.M. Porter, *The rise of statistical thinking*, 1820–1900 (Princeton, Princeton University Press, 1986).
7. R. Rubens, "Florence Nightingale, grondlegster van de verpleegkunde. Haar verbondenheid met Quetelet en het wetenschappelijk denken", *Geschiedenis der geneeskunde* 1 (1) (Oktober, 1993), blz. 56-64.
8. I. H. Stamhuis, *'Cijfers en aequaties' en 'kennis der staatskrachten'. Statistiek in Nederland in de negentiende eeuw* (Amsterdam: Rodopi, 1989).
9. I. H. Stamhuis, 1995/6, 'De met cijfers bedekte negentiende eeuw' Deel 1: "Adriaan Kluit, eerste Nederlandse hoogleraar in de statistiek", *Euclides. Vakblad voor de Wiskundeleraar* **71**, blz. 80-84. Deel 2: "Adolphe Quetelet, bepleiter van de statistische middelmaat", *Euclides.* **71**, blz. 110–115. Deel 3: "Florence Nightingale: statistiek de belangrijkste wetenschap", *Euclides* **71**, blz. 182–187. Deel 4: "Francis Galton: geen statistische middelmaat, maar superioriteit", *Euclides* **71**, blz. 218-222.
10. I. H. Stamhuis en A. de Knecht- van Eekelen (red.), *'De met cijfers bedekte negentiende eeuw'. Toepassing van statistiek en waarschijnlijkheidsrekening in Nederland en Vlaanderen tussen 1840 en 1920.* Themanummer van *Gewina. Tijdschrift voor de geschiedenis der geneeskunde, natuurwetenschappen, wiskunde en techniek.* (Rotterdam: Erasmus Publishing, 1992).
11. C. Woodham-Smith, *Florence Nightingale, 1820–1910.* (Constable, London, 1951).

CWI Vakantiecursus 1997

pp. 23 – 32

Het Zekere voor het Onzekere

W. Kleijne
Rijksinspectiekantoor, Postbus 933, 8901 BS Leeuwarden

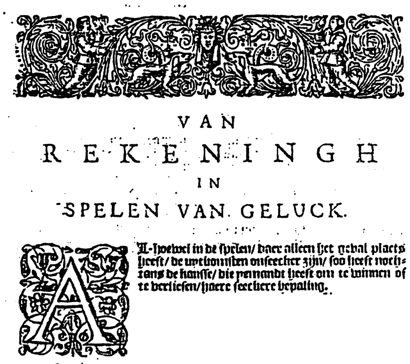
1. Inleiding

"Al-hoewel in de spelen, daer alleen het geval plaets heeft, de uytkomsten onseecker zijn, soo heeft nochtans de kansse die yemandt heeft om te winnen of te verliesen, haere seeckere bepaling."

Met deze zin begint Christiaan Huygens (1629–1695) zijn werk *'Van Rekeningh in Spelen van Geluck'*, waarvan de oorspronkelijke Nederlandse versie in 1660 verscheen.

De publicatie van dit werk kunnen we zien als de markering van het begin van de kansrekening. Uiteraard ontstond het boekje niet uit het niets. In de jaren die aan de publicatie voorafgingen, was in Frankrijk een discussie op gang gekomen over vragen met betrekking tot dobbel- en kaartspelen. Zo legde Antoine Gombauld, Chevalier de Méré, aan Pascal de volgende problemen voor.

1. Hoe moet de inzet verdeeld worden als een spel tussen twee spelers voor het einde wordt afgebroken?


VAN
REKENINGH
IN
SPELEN VAN GELUCK.

AL-hoewel in de spelen/ daer alleen het geval plaets heeft/ de uytkomsten onseecker zijn/ soo heeft noch-tans de kansse/ die yemandt heeft om te winnen of te verliesen/ haere seeckere bepaling.

Figuur 1. Het begin van de *Rekeningh*

2. Bekend was dat het bij vier worpen met één dobbelsteen voordelig is te wedden dat er minstens één 6 boven komt. Nu wordt als volgt geredeneerd. Bij het werpen met twee dobbelstenen is het aantal mogelijke uitkomsten 36, d.w.z. zes keer zo groot als bij het werpen met één steen. Dan zouden 24 worpen (dat is 6x4 worpen) met één steen ook voordeel moeten opleveren op het voorkomen van twee zessen. Waarom zijn de ervaringen in de praktijk niet zo gunstig als deze redenering zou doen vermoeden?

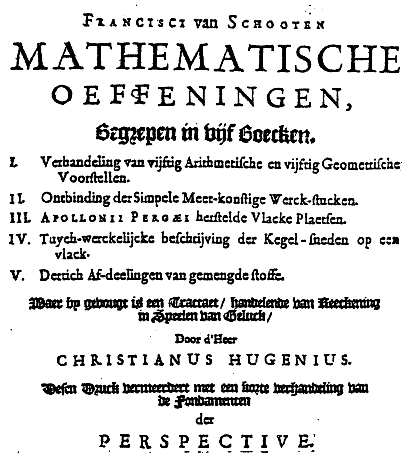
Dergelijke vragen vormden in 1654 het onderwerp van een briefwisseling tussen Fermat en Pascal. Tijdens zijn verblijf in Parijs werd door deze correspondentie de belangstelling van Huygens voor dit soort problemen gewekt. Met vrij grote spoed heeft hij vervolgens zijn *'Rekeningh'* hierover geschreven: al in 1657 verscheen de Latijnse versie onder de titel *'De Ratiociniis in Ludo Aleae'*.

Het hing zo te zeggen in de 17de-eeuwse lucht om te gaan nadenken over, zoals wij nu zouden zeggen, kanstheoretische problemen. Niet alleen ging het daarbij over kansspelen, maar het was tevens de tijd waarin de levensverzekeringswiskunde opkwam. Voor premieberekeningen was het van belang dat men kon beschikken over z.g. sterftetafels. Bekend is de briefwisseling van Christiaan Huygens met zijn broer Lodewijk over de te verwachten levensduur van een mens, dus over de kans dat iemand een bepaalde leeftijd kan bereiken. In de toenmalige terminologie: is het voordelig of onvoordelig om te wedden dat iemand van (bijv.) 16 jaar ten minste (bijv.) 36 jaar wordt? In ons huidige jargon betekent dit de vraag naar de desbetreffende kans. In ons land was het Johan de Witt die in 1671 over dit onderwerp zijn magistrale werk *'Waerdije van Lijfrenten naar proportie van losrenten'* liet verschijnen. Met de *'Rekeningh'* en de *'Waerdije'* zijn in de tweede helft van de 17de eeuw twee standaardwerken verschenen die gedurende lange tijd het gezicht van de wetenschap op de beide terreinen hebben bepaald. Het is buitengewoon boeiend te zien hoe men in de beginperiode van de kansrekening geworsteld heeft met begrippen waarmee wij nu zo vertrouwd zijn. We zullen in het volgende iets van deze worsteling laten zien.

2. De Rekeningh

Een treffende bijzonderheid is dat zowel Christiaan Huygens als Johan de Witt leerlingen waren van de Leidse hoogleraar Frans van Schooten jr. Deze laatste heeft voor publicatie van de *'Rekeningh'* gezorgd door de Nederlandse tekst op te nemen in zijn leerboek *'Mathematische Oeffeningen'*.

Met het ontstaan van deze tekst was al snel duidelijk dat het behandelde onderwerp van een tamelijk grote importantie geacht werd. Frans van Schooten was nl. snel bereid de tekst te publiceren. Het feit dat allereerst de Latijnse vertaling het licht zag, is veelzeggend. Immers, de geleerde wereld schreef in het Latijn. We kunnen er dan ook rustig van uitgaan dat de tekst van wetenschappelijk belang geacht werd. Maar kennelijk was er ook een Nederlandse markt voor. Als bijvoegsel bij zijn *Mathematische Oeffeningen* bestemde Van Schooten de Nederlandse versie van de tekst als leertekst. Het belang van de tekst wordt nog extra benadrukt door het feit dat Jacob Bernoulli de Latijnse


FRANCISCI van SCHOOTEN
MATHEMATISCHE
OEFFENINGEN,
Begrepen in vijf Boecken.

I. Verhandeling van vijftig Arithmetiſche en vijftig Geometriſche Voorſtellen.
II. Ontbinding der Simpele Meet-konſtige Werck-ſtucken.
III. APOLLONII PERGÆI herſtelde Vlacke Plaetſen.
IV. Tuych-werckelijcke beſchrijving der Kegel-ſneden op een vlack.
V. Dertich Af-deelingen van gemengde ſtoffe.

Waer by gevougt is een Tractaet/ handelende van Reeckening in Speelen van Geluck/
Door d'Heer
CHRISTIANUS HUGENIUS.
Desen Druck vermeerdert met een korte verhandeling van de Fondamenten der
PERSPECTIVE.

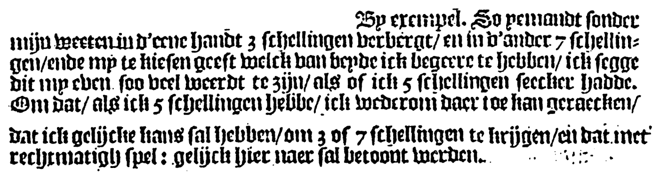
FIGUUR 2. Titelblad v.d. Mathematische Oeffeningen

versie in het begin van zijn *Ars Conjectandi* (1713) opnam. Dit boek nu was in de 18e eeuw het kansrekeningboek bij uitstek. Gezien dit alles kunnen we concluderen dat de tekst van Huygens in de wetenschappelijk-culturele ontwikkeling van de westerse wereld een grote invloed heeft gehad.

Op deze plaats ga ik niet in op de belangwekkende vraag of de ontogenese een herhaling is van de historiogenese, noch in het algemeen, noch in het bijzonder voor wat betreft het kansbegrip. Desondanks zullen we ervaren dat door nauwkeurige bestudering van de ontstaansworsteling van de kansrekening er op z'n minst een herkenning zal optreden en daardoor een verdere verdieping van ons eigen begrip van e.e.a. *De Rekeningh* leent zich daartoe in het bijzonder, temeer daar de tekst in het Nederlands is geschreven. We zullen ons bij onze *tour d'horizon* van het begin van de kansrekening dan ook bepalen tot de *Rekeningh* van Huygens.

3. HET KANSBEGRIP IN DE REKENINGH

Zoals in de inleiding vermeld, vormen de beide vragen van Chevalier de Méré de kern van Huygens' verhandeling. Dat er in de 17e eeuw al gevoel bestond voor het feit dat in onzekere situaties die gebaseerd zijn op toevalligheden, niettemin gerekend kan worden, blijkt behalve uit het geheel van de verhandeling ook uit de eerste alinea van Huygens' werk (zie het begin van dit hoofdstuk). Afgezien nog van de tijd waarin het werk is geschreven, is de constatering van deze eerste alinea allerminst triviaal. De 'zekerheid' in het 'onzekere' is dan ook niet van zelf aanwezig; zekerheid kan alleen verkregen worden door de introductie van een nieuw begrip, nl. het begrip 'kans'. In de *Rekeningh* zullen we tevergeefs zoeken naar een nadere bepaling van wat een kans is. Uiteraard is dit geenszins verwonderlijk: het begrip 'kans' wordt beschouwd als een basisbegrip. Zoals bekend, is ook de frequentistische 'definitie' van kans (aantal goede mogelijkheden / totaal aantal mogelijkheden) geen echte begripsdefinitie. En natuurlijk


By exempel. So yemandt sonder mijn weeten in d'eene handt 3 schellingen verbergt/ en in d'ander 7 schellingen/ende my te kiesen geeft welck van beyde ick begeere te hebben/ ick segge dit my even soo veel weerdt te zijn/ als of ick 5 schellingen seecker hadde. Om dat/ als ick 5 schellingen hebbe/ ick wederom daer toe kan geraecken/ dat ick gelijcke kans sal hebben/ om 3 of 7 schellingen te krijgen/ en dat met rechtmatigh spel: gelijck hier naer sal betoont werden.

FIGUUR 3. Voorbeeld Rekeningh op pag. 489/490

was een axiomatische benadering (à la Kolmogorov) al helemaal niet aan de orde. Het begrip 'kans' blijft in de *Rekeningh* dan ook een naïef begrip waarmee niettemin geëxerceerd wordt.

Gezien de context, bestaande uit gokspelletjes, is het niet verwonderlijk dat een kans nauw gekoppeld wordt aan een geldbedrag, het bedrag dat verloren/gewonnen kan worden, of dat ingezet moet worden. De formulering in de *Rekeningh* is soms zelfs zo dat een kans bijna gelijkgesteld lijkt te worden aan een geldbedrag. Het gaat nl. telkens om dat desbetreffende geldbedrag. Huygens drukt dit vaak zó uit dat hij vraagt wat een kans *waard* is, of wat het een speler *waard* is om een spel te spelen. In de huidige tijd ligt het dan voor de hand dat we de bedoeling van Huygens in moderne termen zouden willen duiden. In dit verband komen we dan al gauw terecht bij iets in de sfeer van stochasten en verwachtingswaarden. Als we echter in deze termen de tekst van Huygens zouden willen interpreteren, dan zouden we Huygens geen recht doen. Het gaat bij hem niet over kansverdelingen en ook niet in de eerste plaats over uitkomsten-op-de-lange-duur.

4. HET FUNDAMENT

Als eerste voorbeeld noemt hij het voorbeeld van Figuur 3.

Vrij vertaald staat hier:

Als iemand zonder dat ik het weet in de ene hand 3 schellingen verbergt en in de andere 7 schellingen en mij laat kiezen welke van de twee ik wil hebben, dan is mij dit 5 schellingen waard. Want, als ik 5 schellingen had, dan zou ik daarmee weer een eerlijk spel kunnen spelen met gelijke kans op 3 of 7 schellingen, zoals hierna aangetoond zal worden.

Dit voorbeeld bergt al direct de nodige problematiek in zich. Want wat zou *Huygens* bedoelen met

" ... dan is mij dit 5 schellingen waard." ?

En ook de volgende zin

"Want, ... "

behoeft een nauwkeurige interpretatie.

Ick neeme tot beyder fondament/dat in het speelen de kansse/die yemant ergens toe heeft / even soo veel weerdt is als het geen / het welck hebbende hy weder tot de selfde kansse kan geraecken met rechtmatigh spel/ dat is/ daer in niemandt verlies geboden werdt.

FIGUUR 4. "Ick neme tot beyder fondament ... verlies geboden werdt."

In deze zinnen komt al aan het begin van de tekst een zeer cruciale gedachte naar voren; een gedachte bovendien waaruit het buitengewoon scherpzinnige vernuft van Huygens blijkt. Het gaat er in dit voorbeeld om te bepalen wat het mij waard zou zijn om dit spel te spelen. Anders gezegd: wat ik er voor zou geven om het spel te kunnen spelen. In feite construeert Huygens nu in gedachten een soort simulatiespel: Stel we breken het spel af. Ieder krijgt een deel van de inzet. Vervolgens wil ik dat deze beide delen weer gebruikt gaan worden als inzet voor een nieuw spel. Beide spelers zetten bij een eerlijk spel dus 5 schellingen in, waarvan de winnaar er 7 en de verliezer er 3 krijgt. Mijn kans is dus de inzet die mij bij eerlijk spel dezelfde kans geeft om 3 te winnen als 7.

Een andere benadering hiervan kan als volgt geformuleerd worden: Gesteld we spelen het spel niet; op welk deel van de inzet zou ik dan aanspraak kunnen maken? Of, weer anders: Als iemand anders mijn plaats zou willen innemen, wat zou hij mij daarvoor dan moeten betalen? Om deze gedachte draait de gehele *Rekeningh.*

Huygens verwoordt dit zeer compact al op de eerste pagina van zijn stuk. We zouden dit gedeelte in navolging van Huygens zelf, het *fundament* van de *Rekeningh* kunnen noemen:

Dus: ... de kans (1) waarop iemand aanspraak kan maken is gelijk aan het bedrag waarmee hij, als hij dat heeft (2) weer tot dezelfde kans (3) kan komen bij eerlijk spel; dat is als niemand in het nadeel is.

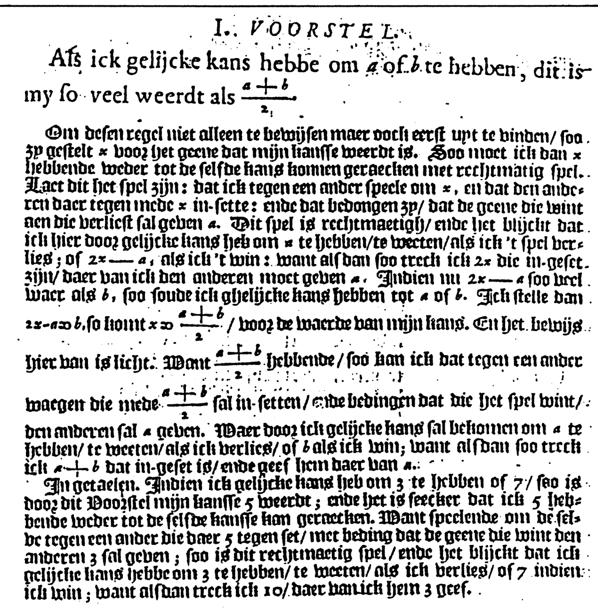
Ten aanzien van de genummerde passages kan het volgende opgemerkt worden:

(1) bijna: het gedeelte;

(2) nl. om in te zetten;

(3) bijna: verdeling van kansen.

Hoewel het door Huygens niet expliciet aan de orde is gesteld, bevat het fundament het begrip verwachting, nl. het deel waarop iemand aanspraak kan maken. Het fundament stelt dus dat de verwachting van een speler in een zekere situatie zijn deel is van de inzet, als het spel niet gespeeld of niet voortgezet wordt. Indien het spel niet door A gespeeld of voortgezet wordt en A wordt vervangen door B, dan moet B een bedrag betalen aan A dat gelijk is aan de verwachting die A in deze situatie heeft opdat er een eerlijk spel gespeeld zal worden.


I. VOORSTEL.

Als ick gelijcke kans hebbe om a of b te hebben, dit is my so veel weerdt als $\frac{a+b}{2}$.

Om desen regel niet alleen te bewijsen maer oock eerst uyt te vinden/ soo zy gestelt x voor het geene dat mijn kansse weerdt is. Soo moet ick dan x hebbende weder tot de selfde kans komen geraecken met rechtmatig spel. Laet dit het spel zijn: dat ick tegen een ander speele om x, en dat den anderen daer tegen mede x in-sette: ende dat bedongen zy/ dat de geene die wint aen die verliest sal geven a. Dit spel is rechtmaetigh/ ende het blijckt dat ick hier door gelijcke kans heb om a te hebben/ te weten/ als ick 't spel verlies; of $2x - a$, als ick 't win: want als dan soo treck ick $2x$ die in-geset zijn/ daer van ick den anderen moet geven a. Indien nu $2x - a$ soo veel waer als b, soo soude ick ghelijcke kans hebben tot a of b. Ick stelle dan $2x - a \infty b$, so komt $x \infty \frac{a+b}{2}$/ voor de waerde van mijn kans. En het bewijs hier van is licht. Want $\frac{a+b}{2}$ hebbende/ soo kan ick dat tegen een ander waegen die mede $\frac{a+b}{2}$ sal in-setten/ ende bedingen dat die het spel wint/ den anderen sal a geven. Waer door ick gelijcke kans sal bekomen om a te hebben/ te weten/ als ick verlies/ of b als ick win; want alsdan soo treck ick $a+b$ dat in-geset is/ ende geef hem daer van a.

In getaelen. Indien ick gelijcke kans heb om 3 te hebben of 7/ soo is door dit Voorstel mijn kansse 5 weerdt; ende het is seecker dat ick 5 hebbende weder tot de selfde kansse kan geraecken. Want speelende om de selfde tegen een ander die daer 5 tegen set/ met beding dat de geene die wint den anderen 3 sal geven; soo is dit rechtmaetig spel/ ende het blijckt dat ick gelijcke kans hebbe om 3 te hebben/ te weten/ als ick verlies/ of 7 indien ick win; want alsdan treck ick 10/ daer van ick hem 3 geef.

FIGUUR 5. Het eerste Voorstel

Deze gedachte wordt door Huygens toegepast op een aantal spelsituaties. De beschreven spelen maken duidelijk dat Huygens reële dobbelspelletjes op het oog had: het gaat hem uiteindelijk niet om één keer een worp met dobbelstenen, maar om hele series van worpen. Gedurende zo'n serie zal er volgens de vooronderstelling een moment komen waarop besloten wordt te stoppen of een speler te vervangen. Op de situatie die dan ontstaat past Huygens zijn fundament toe.

5. De eerste drie voorstellen

De genoemde spelsituaties zijn verwerkt in 14 zogenoemde *Voorstellen*, gerangschikt naar opklimmende moeilijkheid en complexiteit. Van deze 14 vormen de eerste drie het theoretische gedeelte dat noodzakelijk is voor de overige

Het is interessant om kennis te nemen van de opzet van deze tekst. Huygens heeft zichzelf geconfronteerd met een probleem waarvoor een oplossing gevonden moest worden. Het 'uitvinden' is voor hem in feite de analyse van het probleem.

De opzet lijkt hierin enigszins op de opzet die we bezigden bij constructieproblemen in de meetkunde, waarbij onderscheid gemaakt werd tussen de 'analyse' en de 'synthese'. In dit 1e voorstel is de 'analyse' geformuleerd tot en met " /voor de waerde van mijn kans'."
Vervolgens komt de synthese, beginnend bij "En het bewijs hier van is licht."

Bij de oplossing van het probleem maakt Huygens een duidelijk gebruik van het fundament. Hij vindt door scherpe redenering als uitkomst het gemiddelde van beide getallen a en b.

II. *VOORSTEL.*

Als ick gelijcke kans hebbe tot *a* of *b* of *c*, het is my ſoo veel weerdt als of ick $\frac{a+b+c}{3}$ hadde.

FIGUUR 6. De probleemstelling van het 2e Voorstel

III. *VOORSTEL.*

Als het getal der kanſſen die ick hebbe tot *a* is *p*, ende het getal der kanſſen die ick tot *b* heb is *q*; nemende altijdt dat ieder kans even licht kan gebeuren: Het is my weerdt $\frac{pa+qb}{p+q}$.

FIGUUR 7. De probleemstelling van het 3e Voorstel

Op dezelfde manier redenerend in het 2e en het 3e Voorstel vindt hij in het als antwoorden resp. het gemiddelde van a, b en c en het gewogen gemiddelde van a en b.

6. De volgende zes voorstellen

Nu komt in het eerste probleem van Chevalier de Méré aan de orde.

Met de formulering "ten dryen uyt" wordt bedoeld de voorwaarde "wie het eerst drie spelen heeft gewonnen".

Voor hij met de eigenlijke berekening begint, generaliseert Huygens het probleem. Hij betoogt op treffende wijze dat het niet relevant is wat er voorafgaand aan deze spelsituatie is gebeurd, zolang de huidige situatie maar zó is dat mij nog 1 spel rest dat ik moet winnen en de ander 2 spelen. Opsomming van de mogelijkheden en toepassing van het 1e Voorstel leidt dan tot het resultaat. Schematisch ziet Huygens' redenering er als volgt uit:

IV. *VOORSTEL.*

Genomen dan dat ick tegens een ander ſpeelē ten dryen uyt, en dat ick alreede 2 ſpelen hebbe en hy maer een. Ick wil weeten, ingevalle wy het ſpel niet en wilden voortſpeelen, maer het geen ingeſet is gerechtelijck wilden deelen, hoeveel my daer van komen ſoude.

FIGUUR 8. De probleemstelling van het 4e Voorstel

IX. *VOORSTEL.*

Om tuſſchen ſoo veel ſpeelders als voor-geſtelt zijn, waer van d'eene meer en d'ander minder ſpeelen ontbreecken een ieder haer deel te vinden, ſoo moet ingeſien worden, wat hem, wiens deel men begeert te weeten, ſoude toekomen, indien of hy, of elck van d'andere in't beſonder het eerſte volgende ſpel quam te winnen. Dit dan alles te ſaemen geaddeert en door het getal der ſpeelders gedeelt, ſoo komt het geſochte gedeelte van den eenen.

FIGUUR 9. De probleemstelling van het 9e Voorstel

	beginsituatie	1e spel		2e spel	
ik ander	nog 1 te winnen nog 2 te winnen	winst verlies	verlies winst	winst verlies	verlies winst
		einde spel	2e spel noodzakelijk	einde spel	einde spel
verwachting voor mij		a	$\frac{1}{2}$ a		
totaal toepassing I. Voorstel		$\frac{a+\frac{1}{2}a}{2} = 3/4\,a$			

De Voorstellen die volgen geven een variatie te zien in aantallen spelen die ontbreken, resp. in aantallen spelers die meedoen. Dit culmineert in het 9e Voorstel tot de meer algemene formulering met het volgende antwoordschema.

De structuur van de redeneringen in al deze voorstellen is in principe gelijk aan die van het eenvoudige vierde Voorstel:

- analyse van de situatie, leidend tot vermelding van de verschillende mogelijkheden;

- toepassing van (één van) de eerste drie voorstellen.

Vergeleken met het vierde Voorstel komt er bij de daaropvolgende Voorstellen toepassing van de resultaten van (één van) de Voorstellen vanaf het 4e Voorstel bij. Dat houdt in dat de volgorde van het 4e tot en met 9e Voorstel bepaald

Tafel voor drie Speelders.

Spelen die haer ontbreecken.	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Haer deelen.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Spelen die haer ontbreecken.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Haer deelen.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Spelen die haer ontbreecken.	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5
Haer deelen.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 87 . 13
	81	729	729

Spelen die haer ontbreecken.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Haer deelen.	34 . 34 13	338 . 338 53	353 . 353 . 23	133 . 55 . 55	451 . 195 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

FIGUUR 10. Het getallenschema van het 9e Voorstel

niet willekeurig is. Dit gedeelte van Huygens' werk vormt dan ook een prachtige eenheid.

7. De laatste voorstellen

Vanaf het 10e Voorstel is de tekst gericht op de soort problemen waarvan het 2e probleem van Chevalier de Méré (zie de inleiding) een voorbeeld is. De kern van dit probleem komt in het 10e en het 11e Voorstel aan de orde.

De structuur van de redeneringen is weer dezelfde als in de voorgaande Voorstellen. Weer komen de eerste 3 Voorstellen telkens naar voren, evenals resultaten van de volgende. In deze Voorstellen komt Huygens tot het resultaat dat niet de door De Méré genoemde 24 worpen voldoende zijn, maar dat er ten minste 25 worpen nodig zijn. Door zijn systematische werkwijze weet Huygens de valkuil te vermijden waarin De Méré gevallen was. Die ging in zijn redenering impliciet van de veronderstelling uit dat de winstkans evenredig zou zijn met het aantal keer gooien. Hij vergat daarbij dat tweemaal zes in meer dan één worp kan voorkomen. Bij bestudering van Huygens' redenering in het 10e Voorstel, blijkt dat hij in feite de volgende recurrente betrekking afleidt: $w_{n+1} = \frac{5}{6}w_n + \frac{1}{6}a$ voor de waarde w_n van de spelsituatie waarin men in één keer minstens een 6 moet werpen. Op vernuftige wijze bekort Huygens de omvangrijke rekenpartij die in het 11e voorstel nodig is door met tweetallige stappen naar $n = 24$ te lopen, waarna hij zijn bovenvermelde conclusie kan trekken. In de Voorstellen die nog volgen brengt Huygens extra complicaties aan op een manier zoals hij ook in het eerste deel van het werk deed. Huygens besluit zijn Rekeningh met vijf opgaven, voorzien van de antwoorden, maar zonder de uitwerking te vermelden die tot deze antwoorden hebben geleid. De opgaven zijn allerminst triviaal. De antwoorden zijn correct.

X. *VOORSTEL.*

Te vinden van hoeveel reyſen men kan neemen een 6 te werpen met eene ſteen.

Die het ten eerſten neemt/ het is ſeecker dat hy 1 kans heeft om te winnen/ende te hebben het geen ingeſet is/tegen 5 kanſſen om te verlieſen. Want daer ſijn 5 werpen tegen hem/ en maer een voor hem. Het geen ingeſet is zy genoemt a. Soo heeft hy dan 1 kans om te hebben a, en 5 kanſſen om 0 te hebben/het welck door het 2de Voorſtel ſo veel is als $\frac{1}{6}a$. En blijft voor die het hem geeft te werpen $\frac{5}{6}a$. Soo dat hy maer 1 tegen 5 kan ſetten/ die het ten eerſten neemt.

Die van tween eens een 6 neemt te werpen/werdt ſijn deel aldus bereeckent. Indien hy de eerſte reys een 6 raeckt/ ſoo heeft hy a. Indien hy miſt/ ſoo heeft hy noch eene werp / dewelcke door het voorgaende ſoo veel is als $\frac{1}{6}a$. Maer hy heeft maer een kans om in de eerſte reys een 6 te werpen/ en 5 kanſſen om die te miſſen. So heeft hy dan van eerſten aen 1 kans om a te hebben/ en 5 kanſſen tot $\frac{1}{6}a$, het welck door het 2de Voorſtel ſoo veel is als $\frac{11}{36}a$. Ende blijft voor die het hem geeft $\frac{25}{36}a$. Soo dat die het van tween neemt 11 tegen 25 kan ſtellen/dat is/ min als 1 tegen 2.

Hier uyt nu werdt op deſelve manier bereeckent / dat die van dryen eens neemt een 6 te werpen / zijn deel is $\frac{91}{216}a$. Soo dat hy kan 91 tegen 125 ſetten/dat is/weynigh min als 3 tegen 4.

Die het van vieren neemt/ ſijn deel is $\frac{671}{1296}a$. Soo dat hy 671 tegen 625 kan ſetten/dat is/ meer als 1 tegen 1.

Die het van vyven neemt / ſyn deel is $\frac{4651}{7776}a$, ende kan 4651 tegen 3125 ſetten / dat is/weynig min als 3 tegen 2.

Die het van ſeſſen neemt/ ſijn deel is $\frac{31031}{46656}$/ ende kan 31031 tegen 15625 ſetten/ dat is/ weynigh min als 2 tegen 1.

Aldus kan men vervolgens yder getal van werpen vinden. Maer men kan oock met grouter ſprongen voort gaen/ gelijck wy in't volgende Voorſtel aenwyſen ſullen/ ſonder 't welck de Reeckening anders ſeer lang ſoude vallen.

FIGUUR 11. Het 10e Voorstel

XI. *VOORSTEL.*

Te vinden van hoe veel reyſen men kan neemen 2 ſeſſen te werpen met 2 ſteenen.

FIGUUR 12. De probleemstelling van het 11e Voorstel

8. BESLUIT

In een twaalftal bladzijden heeft Huygens ons een buitengewoon waardevolle tekst nagelaten. In zeer compacte vorm zit in deze tekst een overvloed aan wiskundige kennis en wiskundige methoden verwerkt. Ook nu, meer dan 300 jaar na dato, is het nog steeds de moeite waard om van dit alles kennis te nemen. De *Rekeningh* laat op schitterende wijze zien hoe onze voorouders met deze materie zijn omgegaan. De opzet en behandeling van het geheel dwingt groot respect af voor de geniale wijze waarop Christiaan Huygens eigenlijk vanuit niets het begin van de kansrekening heeft opgebouwd.

Vakantiecursus 1997

pp. 33 – 50

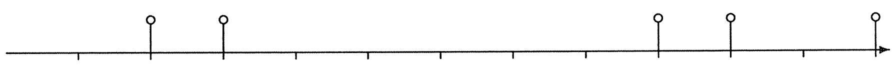
Verdeelde Kansen

Herold Dehling
Rijksuniversiteit Groningen
Mathematisch Instituut
Postbus 800, 9700 AV Groningen

1. Inleiding

In dit hoofdstuk heeft de centrale rol het Bernoulli-experiment, een kansexperiment met slechts twee mogelijke uitkomsten, meestal succes en mislukking genoemd. Hun naam hebben deze experimenten te danken aan Jacob Bernoulli (1654-1705), telg uit een beroemd Zwitsers geleerdengezin die met zijn '*Ars Conjectandi*' het eerste boek over Kansrekening schreef. Groningers vertellen er op dit moment graag bij dat Jacob's broer Johann (1667-1748), een niet minder beroemde wiskundige, ooit van 1695 tot 1705 hoogleraar aan hun universiteit was.

Bernoulli experimenten zijn gemakkelijk te realizeren, bijvoorbeeld met een munt (kop of wapen), een dobbelsteen (wel of geen 6), een vaas met ballen (rood of zwart) of tegenwoordig natuurlijk ook met de computer. Preciezer hebben we een rij van onafhankelijke herhalingen van Bernoulli-experimenten nodig. Ondanks de eenvoud van de achterliggende experimenten valt er veel



FIGUUR 1. Uitkomst van een rij van Bernoulli experimenten met succeskans $p = 0.25$: successen op tijdstippen $k = 2, 3, 9, 10, 12$.

over te vertellen, veel meer dan we in het kader van deze syllabus kunnen doen. Onder meer zullen we aan de hand van Bernoulli-experimenten enkele van de meest bekende kansverdelingen ten tonele voeren, waaronder de binomiale, meetkundige, negatief-binomiale, Poisson-, exponentiële, gamma en de normale.

Het fijne aan alle formules die we hier zullen afleiden is dat ze door experimenten, meestal in de vorm van computer-simulaties, geverifieerd kunnen worden. De kans op een gebeurtenis is niets anders dan een wiskundige idealisatie van de relatieve frequentie van het optreden van deze gebeurtenis in een oneindig lange rij onafhankelijke herhalingen van hetzelfde experiment. Zo kun je dan de kansverdeling van een stochast X zeer nauwkeurig bepalen door heel veel realisaties van deze stochast waar te nemen en een turflijst te maken. Onze ervaring is dat het daadwerkelijk uitvoeren van zulke experimenten voor de student en scholier zeer verhelderend werken kan.

2. Drie oude bekenden

Bij een rij Bernoulli-experimenten met individuele succeskans p (kort met Bernoulli(p)-experimenten aangeduid) kunnen we direct een drietal stochasten definieren, namelijk

- $S_n :=$ het aantal successen onder de eerste n experimenten.
- $T :=$ het aantal mislukkingen dat aan het eerste succes voorafging.
- $T(r) :=$ het aantal mislukkingen dat aan het r^e succes voorafging.

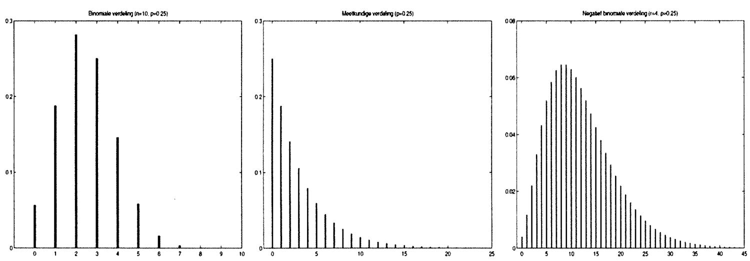
Bij de uitkomst in figuur 1 is bijvoorbeeld $S_{12} = 5$, $T = 1$ en $T(4) = 6$. We hebben hier te maken met discrete stochasten met waardebereik $\{0, 1, \ldots, n\}$ (voor S_n) of $\{0, 1, 2, \ldots\}$ (voor T en $T(r)$). De verdeling van een discrete stochast X wordt volledig beschreven door de kansmassafunctie $p(x) = P(X = x)$. Voor de hier geïntroduceerde stochasten geldt

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

$$P(T = k) = (1-p)^k p \tag{2}$$

$$P(T(r) = k) = \binom{k+r-1}{r-1} (1-p)^k p^r \tag{3}$$

Definitie 1 *De bovenstaande verdelingen heten binomiale, meetkundige en negatief-binomiale verdeling met parameters (n,p), p en (r,p), respectievelijk. Ze worden met de symbolen Bin(n,p), Meetk(p) en NBin(r,p) aangeduid.*



Figuur 2. Kansmassafuncties van de binomiale, meetkundige en negatief-binomiale verdeling, met $n = 10$, $p = 0.25$ en $r = 4$.

In Figuur 2 vind je grafieken van de drie kansmassafuncties voor de daar genoemde waarden van de parameters. Van deze drie verdelingen is zeker de binomiale de meest bekende en meest belangrijke. In de literatuur komt de binomiale verdeling voor het eerst in Jacob Bernoulli's reeds eerder genoemd boek *Ars Conjectandi* voor.

Bewijzen voor de bovenstaande formules zijn in alle elementaire tekstboeken over kansrekening te vinden. Omdat de laatste formule misschien wat minder bekend is, hier een snel bewijs: $T(r) = k$ betekent dat het r^e succes bij het $(k+r)^e$ experiment geboekt werd. Dus moeten de eerste $(k+r-1)$ experimenten precies $r-1$ successen en k mislukkingen opgeleverd hebben en het $(k+r)^e$ experiment een succes. De kans op het eerste is volgens de binomiale verdeling $\binom{k+r-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^k$, de kans op het tweede is gewoon p en vanwege onafhankelijkheid is de gezochte kans het product van deze twee, QED.

Zoals reeds in de inleiding gezegd, kun je de formules (1), (2) en (3) ook experimenteel verifieren. Neem bijvoorbeeld de verdeling van S_{10} voor $p = 1/4$ (dit is juist het in figuur 2 geschetste geval). Eén realisatie van S_{10} krijg je door 10 Bernoulli($\frac{1}{4}$)-experimenten uit te voeren en het totale aantal successen te tellen. Door dit M keer te herhalen, krijg je een rij $s_{10}(1), \ldots, s_{10}(M)$ van realisaties, en dan kun je de frequentie van optreden van $0, 1, \ldots, 10$ bekijken,

$$f_M(k) := \#\{1 \leq i \leq M | s_{10}(i) = k\}.$$

De wet van grote aantallen leert dat $f_M(k)/M \to p(k)$ als $M \to \infty$. Zo kun je dus $p(k)$ willekeurig goed benaderen door maar M voldoende groot te kiezen. We hebben dit even met $M = 1000$ gedaan en de volgende turflijst verkregen:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_M(k)/M$	0.062	0.173	0.304	0.219	0.162	0.060	0.016	0.003
$p(k)$	0.056	0.188	0.282	0.25	0.146	0.058	0.016	0.003

In de laatste rij vind je de theoretische kansen op de verschillende uitkomsten. De empirisch waargenomen relatieve frequenties liggen al aardig in de buurt van de theoretische (binomiale) kansen, maar voor een overtuigendere overeenstemming zou je het experiment wel 10,000 keer moeten uitvoeren.

We vermelden verder even dat de meetkundige verdeling een bijzonder geval is van de negatief-binomiale verdeling, en wel met $r = 1$. Bovendien bestaat er nog een heel interessante relatie tussen de meetkundige en de negatief-binomiale verdeling: heb je onafhankelijke stochasten $U_1, U_2, \ldots, U_r$ met allemaal een Meetk(p)-verdeling, zo blijkt $T(r) = U_1 + \ldots + U_r$ een NBin(r, p)-verdeling te hebben. De mooiste manier om dit in te zien is door op te merken dat de wachttijd $T(r)$ tot het r^e succes geschreven kan worden als som van het aantal mislukkingen voor het eerste succes, het aantal mislukkingen tussen eerste een tweede succes, enzovoorts. Omdat het hele stochastische proces bij iedere succes als het ware weer opnieuw begint en al het gebeurde uit het verleden vergeet, zijn de aantallen mislukkingen tussen twee opeenvolgende successen stochastisch onafhankelijk en meetkundig verdeeld. Daarmee hebben we bewezen dat de som van r onafhankelijke stochasten met een Meetk(p)-verdeling een NBin(r, p)-verdeling heeft.

3. Verwachte waarden en faire prijzen

Het belangrijkste numerieke kengetal van een kansverdeling is haar verwachtingswaarde. Voor een stochastische variabele X met een aftelbaar waardebereik, ook discrete stochasten genoemd, wordt de verwachtingswaarde gedefinieerd door

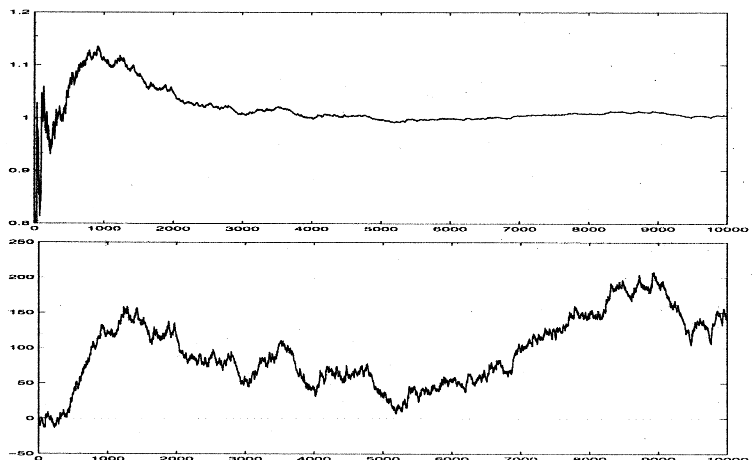
$$EX = \sum_x xP(X = x) \tag{4}$$

dus een gewogen gemiddelde van alle mogelijke waarden van X met de kansen als gewichten. Merk op dat de som in het rechter lid van (4) een aftelbare som is, geïndiceerd door alle x in het waardebereik van de stochast X. Om zeker te kunnen zijn dat de som in (4) niet van de volgorde van sommatie afhangt, moet je bij de definitie van EX verder nog eisen dat $\sum_x |x|P(X = x) < \infty$, oftewel dat de reeks in het rechter lid van (4) absoluut convergeert - maar over zulke wiskundige details maken we ons op dit moment niet zo druk.

Voor de eerder genoemde stochasten S_n, T en $T(r)$ geldt

$$ES_n = np \quad ET = \frac{q}{p} \quad ET(r) = r\frac{q}{p}$$

Deze formules kunnen met behulp van respectievelijk het binomium van Newton, de meetkundige en de negatief-binomiale reeks bewezen worden - details staan in ieder boek over kansrekening.



Figuur 3. Verloop van de gemiddelde uitkering bij 10,000 spelen met een meetkundig($\frac{1}{2}$)-verdeelde uitkering (boven) en van de netto-winst bij een inzet van fl. 0.99 per spel (beneden).

Het concept 'verwachtingswaarde' ontstond in de 17^e eeuw in verband met de waardering van kansspelen. Stel je hebt de gelegenheid om aan een spel deel te nemen waarbij je winst de uitkomst van een stochast X is. Hoeveel geld zou de deelname aan dit spel je waard moeten zijn? Christiaan Huygens stelde de verwachtingswaarde van X als faire prijs voor. Een moderne rechtvaardiging van dit voorstel maakt gebruik van de wet van grote aantallen welke beweert dat de gemiddelde waarde bij een rij $X_1, X_2, \ldots$ van onafhankelijke realisaties van een stochast naar de verwachtingswaarde convergeert, dus

$$\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \to EX$$

Als je nu voor deelname aan één spel minder dan EX hoeft te betalen, zul je op den duur winst maken, want gemiddeld krijg je per spel meer terug dan je ingezet hebt. Als je bijvoorbeeld aan een spel deelneemt waarbij een munt net zo lang geworpen wordt tot voor het eerst *Kop* verschijnt, en je dan als uitkering het voorafgaande aantal *Munt*en in guldens uitbetaald krijgt, dan is dit spel $ET = \frac{1/2}{1/2} = 1$ waard. In figuur 3 vind je boven een grafiek van (één toevallige realisatie van) de gemiddelde winst per spel tijdens de eerste 10,000 spelen en beneden een grafiek van je netto-winst als je per spel een prijs van fl. 0.99 betaald hebt. Ondanks het slechts marginale verschil tussen de verwachte waarde en je inzet loopt de winst op den duur aardig op.

Een kleine variatie op het boven bestudeerde spel: weer wordt met een zuivere munt gegooid tot voor het eerst *Kop* verschijnt. De uitkering is fl. 1,2,4,8,16, enz. als dit voor het eerst bij de 1^e, 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, enz. worp gebeurt. Wat is nu de waarde van dit spel? Met behulp van de eerder ingevoerde stochasten kunnen we de uitkering schrijven als $X = 2^T$. Deze stochast neemt alleen waarden van de vorm 2^k aan, en wel met kans 2^{-k}, en heeft dus de verwachtingswaarde

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot P(X = 2^k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot 2^{-k} = \infty.$$

Een onkritische toepassing van de klassieke waarderingsregel zou dus suggereren dat de waarde van dit spel oneindig is. Maar aan de andere kant kun je snel nagaan dat bij een inzet van fl. 64 de kans 1/64 is om echt winst te maken, en je dus met kans 63/64 verliest of tenminste niets wint. Het paradox van dit spel dat dus een oneindige verwachtingswaarde heeft maar waarvoor aan de andere kant niemand ook maar fl. 64 zou willen inzetten, staat bekend als het St.Petersburg paradox en het bijbehorende spel als het St.Petersburg spel. Hun naam danken spel en paradox aan Daniel Bernoulli (1700 - 1792, geboren in Groningen als zoon van de reeds eerder genoemde Johann Bernoulli), die in 1738 een oplossing voor dit paradox voorstelde in een publicatie in de mededelingen van de Academie van Wetenschappen te St.Petersburg. In zijn publicatie analiseert Bernoulli de utiliteit van een hoeveelheid geld en komt daarmee tot de definitie van een morele verwachtingswaarde van een spel. In de loop der jaren zijn nog veel meer oplossingen voor het St.Petersburg probleem voorgesteld, maar geen enkele daarvan is echt dwingend. De belangrijkste boodschap is gewoon dat stochasten met oneindige verwachtingswaarden je in paradoxale situaties kunnen brengen.

Tenslotte nog een tweede kengetal van verdelingen, de variantie. Deze is gedefinieerd door

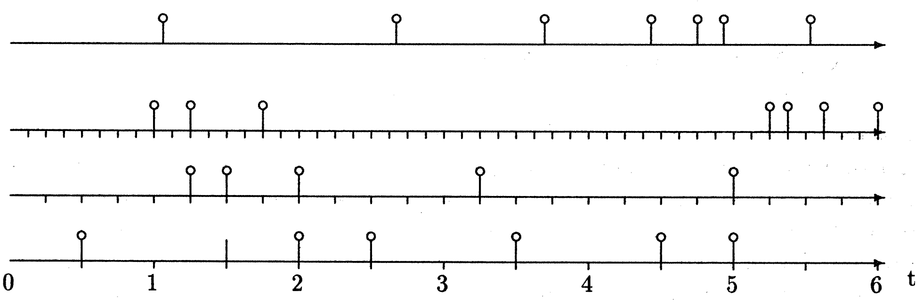
$$\mathrm{Var}(X) = E(X - EX)^2$$

en geeft iets weer van de spreiding van mogelijke waarden van de stochast rondom hun verwachtingswaarde.

4. Limieten a la Poisson

Limieten zijn het dagelijks brood van de wiskundige. Zo kom je van differentiequotienten tot afgeleide van een functie, van differentievergelijking tot differentiaalvergelijking, van som tot integraal. Het is wel even goed om erbij stil te staan dat in al deze gevallen het limietobject conceptueel moeilijker is dan het oorspronkelijke discrete object, maar dat dat ruimschots gecompenseerd wordt door het veel gemakkelijker rekenwerk. Geen mens die onthouden kan wat $\sum_{k=1}^{n} k^5$ is, maar dat $\int_0^n x^5 dx = n^6/6$ weet ieder VWO-scholier.

Ook in de kansrekening is de allereerste motivatie voor het bestuderen van limieten dat daardoor berekeningen eenvoudiger worden. Zo is de formule voor de binomiale verdeling bij grote waarden van n vrijwel onhanteerbaar omdat de binomiale coëfficiënten veel te groot worden. Maar ook op zich zijn limieten iets fascinerends. Hier zullen we eerst een limietgeval bestuderen dat ontstaat doordat we onafhanklijke Bernoulli-experimenten met een steeds hogere frequentie en evenredig gedaalde succeskansen uitvoeren. Om preciezer te zijn voeren we experimenten op de tijdstippen $\frac{1}{f}, \frac{2}{f}, \frac{3}{f}, \ldots$ uit, en wel met succeskansen $p_f = \frac{\lambda}{f}$, waarbij $\lambda > 0$ een parameter is. Frequentie en succeskans zijn



Figuur 4. Rijen van Bernoulli-experimenten, uitgevoerd met frequenties $f = 2, 4, 8$ (van beneden naar boven) en Poisson-process (bovenste rij), allen met intensiteit $\lambda = 1$.

zo gekozen dat je in een tijdsinterval van lengte 1 juist λ successen verwacht. In figuur 4 vind je van beneden naar boven realisaties van Bernoulli-experimenten voor frequenties $f = 2, 4, 8$ en bijbehorende succeskansen $p_f = \frac{1}{f}$.

Wat gebeurt er nu als $f \to \infty$, dus als we als het ware op nanoseconden-schaal Bernoulli-experimenten uitvoeren, en wel met een succeskans in de orde van 10^{-9}? We kijken eerst even naar het waargenomen aantal successen in het tijdsinterval $(a, b]$, welk we met $N_f(a, b)$ zullen noteren. Met een beetje nadenken zie je dat in $(a, b]$ precies $[fb] - [fa]$ experimenten uitgevoerd worden, en wel ieder met succeskans $\frac{\lambda}{f}$. Dus heeft $N_f(a,b)$ een binomiale verdeling met parameters $[fb]-[fa]$ en $p_f = \frac{\lambda}{f}$ (met $[x]$ noteren we het entier van x, dus het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan x). Hier is nu het moment om de Poisson-limietstelling te gebruiken.

STELLING 1 *Zij* $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ *een rij stochasten met een binomiale verdeling met parameters* (n, p_n)*. Als* $np_n \to \lambda$ *voor* $n \to \infty$*, dan geldt dat*

$$P(X_n = k) \to e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

voor $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Bewijs. We zullen deze stelling per inductie over k bewijzen, beginnend met $k = 0$. In dat laatste geval wordt

$$P(X_n = 0) = (1-p_n)^n = (1 - \frac{np_n}{n})^n \to e^{-\lambda}$$

als gevolg van het bekende feit dat $(1+\frac{x_n}{n})^n \to e^x$ als $x_n \to x$ voor $n \to \infty$. Als we de stelling voor $0, 1, 2, \ldots, k-1$ bewezen hebben, kunnen we verder gaan:

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n-k+1}{k}\,\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} p_n^{k-1} (1-p_n)^{n-(k-1)} \frac{p_n}{1-p_n} \\
&= \frac{1}{k} np_n (1 - \frac{k-1}{n}) \frac{1}{1-p_n} \times P(X_n = k-1) \\
&\to \frac{\lambda}{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k)!}
\end{aligned}$$

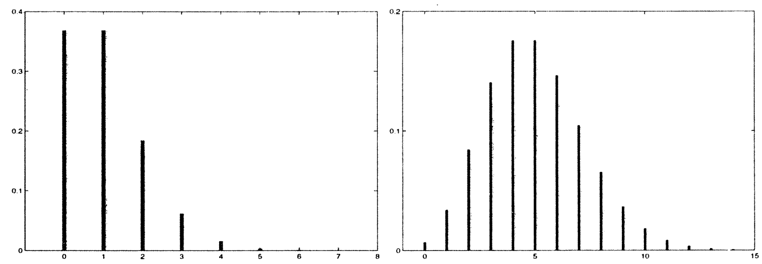
waarmee de Poisson-limietstelling ook voor k bewezen is. QED

DEFINITIE 2 *De verdeling* p_λ *op* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *gegeven door de kansmassafunctie*

$$p_\lambda(k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

heet Poisson-verdeling met parameter λ*. We schrijven ook kort Poisson(*λ*)-verdeling.*

In figuur 5 vind je een schets van de kansmassafuncties van de Poisson-verdeling met parameters $\lambda = 1$ en $\lambda = 5$. Voor de Poisson-verdeling zijn zowel verwachtingswaarde als ook variantie gelijk aan de parameter λ. Dit verwacht je ook op grond van de Poisson-limietstelling, want voor de binomiale stochasten X_n geldt $EX_n = np_n$ en $\mathrm{Var}(X_n) = np_n(1-p_n)$, en van beide kun je snel inzien dat ze naar λ convergeren.



FIGUUR 5. Kansmassafuncties van de Poisson-verdeling met parameters $\lambda = 1$ (links) en $\lambda = 5$ (rechts).

Grof kun je de Poisson-limietstelling zo formuleren: 'het aantal successen bij een groot aantal onafhankelijke Bernoulli-experimenten met zeer kleine succeskans is ongeveer Poisson-verdeeld met parameter het product van aantal experimenten en succeskans'. De Poisson-verdeling wordt ook wel de wet van zeldzame gebeurtenissen of wet der kleine aantallen genoemd. Een typische toepassing is bij de vraag naar het aantal sterftegevallen onder alle 40-jarige verzekerden van een pensioenverzekeraar. De sterftetabel vermeldt een sterftekans van $p = \frac{1}{1000}$, en dus heeft het aantal overledenen een $\mathrm{Bin}(R, p)$-verdeling waarbij R het aantal 40-jarige verzekerden is. Bij benadering levert dit een Poisson-verdeling, en wel met parameter $\lambda = R \cdot p$.

Om een indruk van de nauwkeurigheid van de Poisson-benadering te geven, hebben we in de volgende tabel een aantal binomiale kansen berekend en met de Poisson-benadering vergeleken. De parameters van de binomiale verdeling zijn zo gekozen dat het gemiddeld aantal successen altijd 1 is.

Verdeling	Kansen					
	0	1	2	3	4	≥ 5
Bin(10, .1)	0.3487	0.3874	0.1937	0.0574	0.0112	0.0016
Bin(100, .01)	0.3660	0.3697	0.1849	0.0610	0.0149	0.0034
Bin(1000, .001)	0.3677	0.3681	0.1840	0.0613	0.0153	0.0036
Poisson(1)	0.3679	0.3679	0.1839	0.0613	0.0153	0.0037

Reeds bij matig grote waarde van f, zeg $f = 100$ is de benadering van de binomiale verdeling door de Poisson-verdeling dus uitstekend.

Voor een snelle beoordeling van de kans op zeldzame gebeurtenissen is de Poisson-verdeling uitermate handig. Neem bijvoorbeeld een bepaalde ziekte waaraan jaarlijks één op de 2,000 Nederlanders komt te overlijden. In een dorp of woonwijk met 2,000 inwoners verwacht je dus één sterftegeval ten gevolg van deze ziekte, en de kansen op 0,1,2,3, ... sterftegevallen zijn in de bovenstaande tabel te vinden. Daar vind je bijvoorbeeld dat de kans dat een gegeven dorp met 2,000 inwoners 5 of meer sterftegevallen telt zeer klein is, gelijk aan 0.0037 om precies te zijn. Maar toch betekent het dat één op de 273 dorpen met 2,000 inwoners zo'n extreem aantal sterftegevallen zal hebben. Puur toeval, maar leg dat eens aan de dorpsbewoners uit. Zij zullen eerder geneigd zijn de oorzaak te zoeken bij een vuilverbranding in de buurt of in een kerncentrale 10 km verderop, om maar wat te noemen.

Na dit intermezzo over Poisson-benadering van binomiale kansen even terug naar de Bernoulli-experimenten met frequentie f en succeskans $\frac{\lambda}{f}$. Het aantal successen in $(a, b]$ heeft een Bin$([fb] - [fa], \frac{\lambda}{f})$-verdeling, en verder geldt $([fb] - [fa])\frac{\lambda}{f} \to \lambda(b-a)$. Dus convergeert de verdeling van $N_f(a, b)$ naar een Poisson$(\lambda(b-a))$-verdeling. Verder geldt voor disjuncte intervallen $I_1 = (a_1, b_1]$, $I_2 = (a_2, b_2]$, ..., $I_n = (a_n, b_n]$ dat de aantallen $N_f(I_1), \ldots, N_f(I_n)$ stochastisch onafhankelijk zijn, want ze hebben betrekking op onafhankelijke experimenten.

Op de een of andere manier krijg je nu het gevoel dat het proces van Bernoulli-experimenten met steeds hogere frequentie en dalende succeskansen wel een limiet moet hebben. De limiet zou je kunnen beschrijven door een familie van stochasten $N(a, b)$, $0 \leq a < b \leq \infty$, welke aangeven hoeveel gebeurtenissen er in het interval $(a, b]$ opgetreden zijn. Zo'n familie van stochasten heet ook wel stochastisch proces. De beschouwingen in de vorige alinea geven aanleiding tot de volgende twee eisen aan het limietproces:

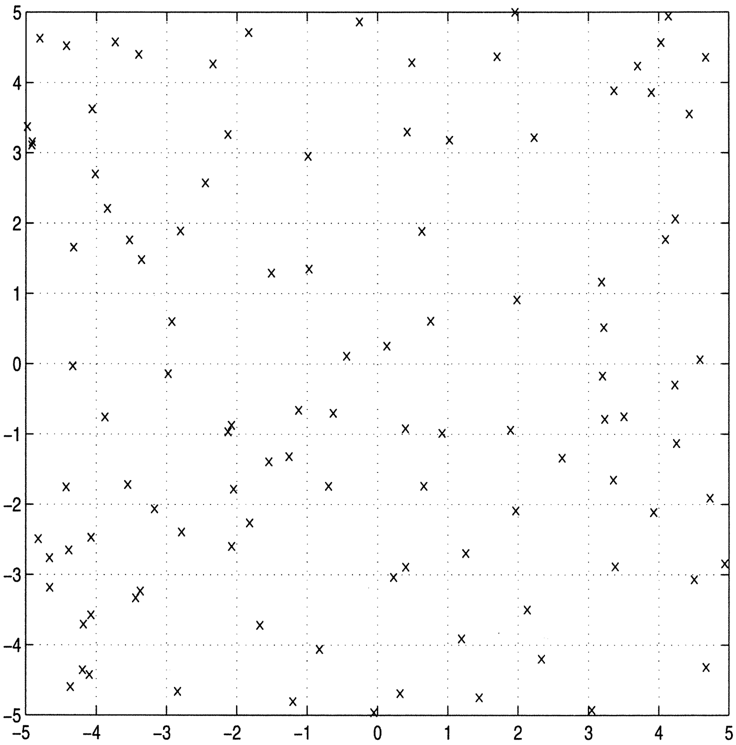
- Voor alle intervallen $I \subset \mathbf{R}$ is $N(I)$ een stochast met een Poisson$(\lambda|I|)$-verdeling (hier staat $|I|$ voor de lengte van het interval I).
- Voor disjuncte intervallen $I_1, \ldots, I_n$ zijn $N(I_1), \ldots, N(I_n)$ onafhankelijke stochasten.

Nu blijkt dat deze twee eigenschappen al eenduidig een proces $N(I), I \subset \mathbf{R}$ vastleggen. Dit limietproces heet ook wel Poisson-proces. Exact te bewijzen dat het Poisson-proces als limiet van Bernoulli-processen optreedt is niet zo eenvoudig, onder meer al omdat je eerst over de wijze van convergentie nadenken moet. In de meeste boeken wordt het Poisson proces dan ook niet als limiet van Bernoulli-processen geïntroduceerd, maar axiomatisch met de bovenstaande axioma's. Voor de intuïtie is echter onze introductie veel beter - een Poisson-proces moet je je voorstellen als een Bernoulli-proces met experimenten op nanosecondenschaal.

Het Poisson-proces wordt heel veel gebruikt als model voor verschijnselen in natuur en techniek waarbij een bepaald gebeurtenis toevallig optreedt. De tijden van binnenkomst van een telefoongesprek in een centrale, het moment van optreden van schadegevallen bij een verzekeringsmaatschappij, tijdstippen van radioactieve vervallen zijn klassieke voorbeelden hiervan

De procedure van steeds frequentere Bernoulli-experimenten kunnen we ook in het platte vlak uitvoeren. Als experimenten op de roosterpunten $(\frac{i}{f}, \frac{j}{f})$, $i, j \in \mathbf{N}$ gebeuren, en wel met succeskans $p_f = \frac{\lambda}{f^2}$, dan vormen de punten waarop successen optreden in de limiet een ruimtelijk Poisson-proces. Axiomatisch kun je dit proces net als een Poisson-proces in de tijd beschrijven door de twee bovenstaande eisen, waarbij 'interval' door 'rechthoek' en 'lengte' door 'oppervlakte' dient vervangen te worden.

Ruimtelijke Poisson-processen worden bijvoorbeeld gebruikt om de verdeling van een zeldzame plant over een gebied te beschrijven. In figuur 6 staat



FIGUUR 6. Ruimtelijk Poisson-proces met intensiteit $\lambda = 1$

een realisatie van een tweedimensionaal Poisson-proces met parameter $\lambda = 1$. Het aantal punten in een vierkant van zijlengte 1 heeft dus een Poisson(1)-verdeling. De aantallen in disjuncte vierkanten zijn onafhankelijk zodat de 100 vierkanten met geheeltallige hoekpunten in figuur 6 een toevallige steekproef uit een Poisson(1)-verdeling vormen. Je kunt nu weer een turflijst maken met de aantallen rechthoeken met $0, 1, 2, \ldots$ punten erin, en dan met de verwachte aantallen vergelijken (het tellen laten we maar aan de lezer over):

k	0	1	2	3	≥ 4
aantal rechthoeken					
$100 \times \frac{e^{-1}}{k!}$	36.8	36.8	18.4	6.1	1.9

Wat opvalt in figuur 6 is de clustering van gebeurtenissen. Hoewel je maar één gebeurtenis per vierkant verwacht, zijn er al met 3 en 4. En toch is het puur toeval, en geen wetmatige neiging tot clustering. Je zou in tegendeel juist niet in toeval geloven als ieder vierkant precies één gebeurtenis had.

5. LANG ZULLEN ZE WACHTEN

Na de beschouwingen in de vorige paragraaf ligt het vermoeden voor de hand dat ook de wachttijden tot het optreden van een eerste, respectievelijk r^e, succes bij een Bernoulli-experiment een limietverdeling hebben. We noteren met T_f het tijdstip waarop het eerste succes optreedt. Dan kan T_f de waarden $\frac{1}{f}, \frac{2}{f}, \ldots$ aannemen en verder geldt

$$P(T_f = \frac{k}{f}) = (1 - \frac{\lambda}{f})^{k-1} \cdot \frac{\lambda}{f}. \tag{5}$$

De limiet hiervan voor $f \to \infty$ levert echter een grote teleurstelling, want de kansen convergeren naar 0, zelfs uniform over alle k. Reden hiervoor is dat het tijdstip van optreden van een eerste gebeurtenis in het limietproces een continue verdeling heeft, en dus de kans op een vaste realisatie gelijk is aan nul.

Algemeen kun je de verdeling van een continue stochast X niet door de kansmassafunctie $P(X = x)$ beschrijven, omdat dit altijd 0 oplevert. Continue verdelingen beschrijf je door een kansdichtheidsfunctie, dat is een niet-negatieve integreerbare functie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ met de eigenschap dat

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Behalve niet-negatief en integreerbaar zijn, moeten kansdichtheidsfuncties nog aan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ voldoen, domweg omdat $P(-\infty < X \leq \infty) = 1$.

De naam kansdichtheidsfunctie heeft een heel intuïtieve betekenis als je even kijkt naar de benadering

$$P(x < X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(s)ds \approx \Delta x \cdot f(x) \tag{6}$$

Deze identiteit kun je herschrijven tot $f(x) \approx P(x < X \leq x + \Delta x)/\Delta x$, en dat betekent dat $f(x)$ kansmassa gedeelt door intervallengte is, dus een soort dichtheid van de kansmassa. Voor berekeningen vaak handig is de verdelingsfunctie van een stochast X, gedefinieerd door $F(x) = P(X \leq x)$. Heeft X een dichtheid $f(x)$, dan geldt $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ en omgekeerd $f(x) = F'(x)$.

Gemotiveerd door (6) kijken we nu even naar $P(T_f \in (t, t + \Delta t])$. Met (5) krijgen we

$$P(T_f \in (t, t + \Delta t]) = \sum_{t \leq \frac{k}{f} \leq t + \Delta t} (1 - \frac{\lambda}{f})^{k-1} \frac{\lambda}{f}.$$

In het rechter lid staan $f \cdot \Delta t$ termen, waarbij $k \approx ft$. Dus krijgen we voor $f \to \infty$ de benadering

$$P(T_f \in (t, t + \Delta t]) \approx f\Delta t(1 - \frac{\lambda}{f})^{ft} \frac{\lambda}{f} \to \lambda e^{-\lambda t} \Delta t,$$

waarbij gebruik gemaakt is van het feit dat $(1-\frac{\lambda}{f})^f \to e^{-\lambda}$ als $f \to \infty$. In de limiet heeft de wachttijd tot het eerste succes dus de dichtheid $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ voor $t \geq 0$. Deze dichtheid heet ook *exponentiële* dichtheid met parameter λ.

De verdeling van de wachttijd T tot een eerste succes in een Poisson-proces kunnen we ook rechtsstreeks bestuderen, en wel met de overweging dat $T > t$ dan en slechts dan als geen succes in $(0,t]$ optreedt en dat dus

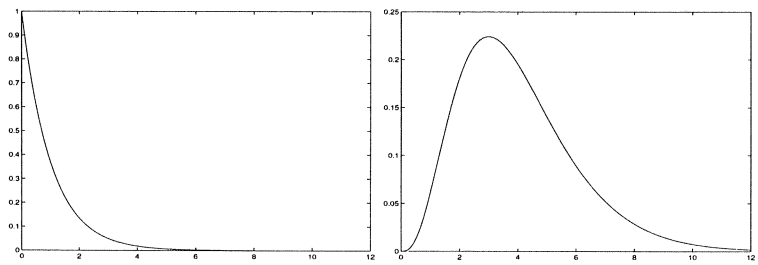
$$P(T > t) = P(N(0,t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Dus heeft T de verdelingsfunctie $P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$, en de dichtheid $f(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\lambda t}) = \lambda e^{-\lambda t}$. Op soortgelijke wijze kun je ook de verdeling van de wachttijd tot de r^e succes bepalen. Je hebt namelijk dat $T(r) \leq t$ dan en slechts dan als $N((0,t]) \geq r$ en dus

$$P(T(r) \leq t) = P(N((0,t]) \geq r) = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Zo hebben we de verdelingsfunctie van $T(r)$ al gevonden en kunnen nu verder de kansdichtheid door differentiatie bepalen:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{d}{dt}\left[1 - e^{-\lambda t}\{1 + \frac{\lambda t}{1} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}\}\right] \\
&= \lambda e^{-\lambda t}\{1 + \frac{\lambda t}{1} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}\} \\
&\quad -\lambda e^{-\lambda t}(1 + \frac{\lambda t}{1} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{r-2}}{(r-2)!}\} \\
&= \frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$



FIGUUR 7. Kansdichtheidsfuncties van gamma-verdelingen met parameters $\lambda = 1$ en $r = 1$ (links), $r = 4$ (rechts).

DEFINITIE 3 *Voor* $r = 1, 2, \ldots$ *en* $\lambda > 0$ *wordt door*

$$f(t) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t}$$

de gamma-dichtheid met parameters (r, λ) gedefinieerd. De bijbehorende verdeling heet gamma-verdeling.

De gamma-verdeling kan ook voor niet geheeltallige waarden van r gedefinieerd worden, maar dan moet je $(r-1)!$ in de noemer vervangen door de waarde van de gamma-functie, $\Gamma(r) := \int_0^\infty t^{r-1}e^{-t}dt$. Verder merken we nog op dat de gamma-verdeling met $r = 1$ gewoon een exponentiële verdeling is. In figuur 7 staan grafieken van de exponentiële(1) en de gamma(4,1) dichtheden.

De exponentiële verdeling heeft de opmerkelijke eigenschap dat

$$P(T > s + t | T > s) = P(T > t),$$

zoals je snel nagaan kunt. Dit betekent dat de kans dat je nog t tijdseenheden wachten moet gegeven dat je al s eenheden gewacht hebt gelijk is aan de kans dat je in het begin t eenheden moest wachten. Men noemt deze eigenschap de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling. Als je dus bij een Poisson-proces al lang op een succes hebt moeten wachten, vergroot dat geenszins de kans dat nu binnenkort een succes optreedt.

Een andere bijzonderheid van de exponentiële verdeling is haar grote spreiding. Het volgende tiental toevallige realisaties van een Exp(1) verdeelde stochast geeft een idee wat dit betekent:

0.05 0.12 0.19 0.27 0.49 0.72 0.78 0.81 1.46 3.98

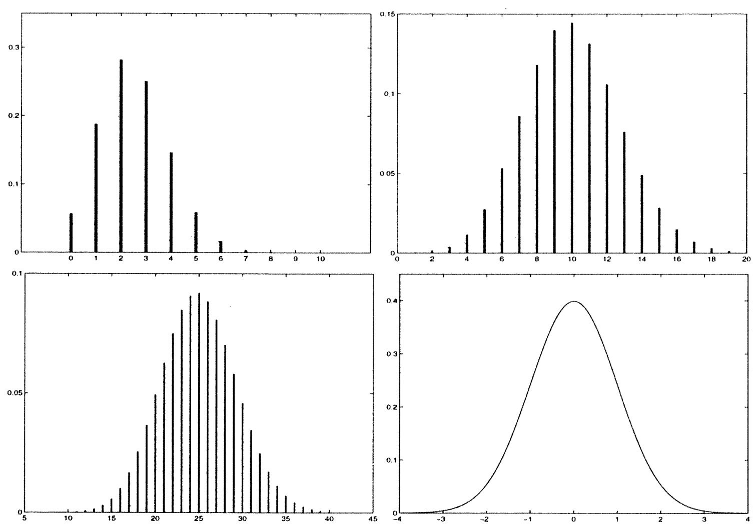
De ene keer treedt het eerste succes dus heel snel op, en een andere keer moet je schijnbaar eindeloos wachten. Een heel scherpe versie krijgt dit verschijnsel als je naar de wachttijden T en R op het eerste succes in twee onafhankelijke Poisson-processen kijkt. Dan kun je namelijk bewijzen dat $E(R/T) = \infty$, maar natuurlijk ook $E(T/R) = \infty$. Is het dus al erg dat je soms lang wachten moet, wordt de zaak pas werkelijk irritant omdat je altijd de indruk hebt in de verkeerde wachtrij te staan. Dit verschijnsel het ook wel de wachttijd-paradox.

6. Normale limieten

Een heel andere limiet komt te voorschijn als je de succeskans p vast houdt terwijl het aantal experimenten opgevoerd wordt. In figuur 8 hebben we de kansmassafuncties van S_n voor $p = 0.25$ en voor $n = 10$, 40 en 100 geschetst. Inderdaad lijken de kansmassafuncties te convergeren - maar als je precies kijkt zie je dat daarvoor wel enige herschaling nodig is. Dat kan ook niet anders want zoals bekend is $ES_n = np$ en $Var(S_n) = np(1-p)$ en dus heeft de verdeling van S_n geen schijn van kans om te convergeren. Wat wel zou kunnen convergeren is de verdeling van $S_n^* := (S_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$, want voor deze gestandardiseerde stochast geldt dat $ES_n^* = 0$ en $Var(S_n^*) = 1$.

Stelling 2 (Centrale Limiet Stelling) *Laat S_n binomiaal verdeeld zijn met parameters n en p. Dan geldt voor $a < b \in \mathbf{R}$*

$$P(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$



FIGUUR 8. Kansmassafuncties van de binomiale verdeling met parameters $p = 0.25$, $n = 10, 40$ (boven), $n = 100$ (beneden links). Kansdichtheidsfunctie van de standaard normale verdeling (beneden rechts)

.

als $n \to \infty$.

DEFINITIE 4 *De kansverdeling op* $\mathbf{R}$ *met dichtheid*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

heet normale verdeling met parameters μ *en* σ^2*. In het geval* $\mu = 0$ *en* $\sigma^2 = 1$ *spreek je van een standaardnormale verdeling.*

De centrale limietstelling (CLS) leert dus dat de verdeling van S_n^* naar een standaardnormale verdeling convergeert. In principe kun je de CLS net zo bewijzen als de limietstelling voor de wachttijden in de vorige paragraaf, maar dat wordt voor de CLS veel moeilijker. Eenvoudiger is een bewijs met behulp van karakteristieke functies, maar daar heb je dan weer meer technische voorkennis voor nodig.

De Centrale Limiet Stelling werd voor het eerst door De Moivre (1667-1754) bewezen, en bij hem duikt ook de normale verdeling voor het eerst op. Toch krijgt de normale verdeling en de bijbehorende dichtheid vaak de naam van de beroemde 19e eeuwse wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Deze naamgeving is ook wel enigzins gerechtvaardigd omdat Gauss de normale verdeling als verdeling van meetfouten postuleerde en zijn statistische analyse hierop baseerde. Om alvast de naamgeving kracht bij te zetten heeft men in Duitsland op het 10DM-briefje de normale dichheid naast het portret van Gauss geplaatst.

De standaardnormale kansdichtheidsfunctie $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, ook wel Gauss-kromme of wegens haar vorm bell-shaped curve genoemd, heeft een aantal interessante eigenschappen. Om te beginnen, heeft ze geen expliciet in termen van elementaire functies uit te drukken primitieve. Dit maakt dat je integralen niet analytisch berekenen kunt, maar steeds in tabellen opzoeken moet. Een aantal bepaalde integralen kent vrijwel iedereen die ooit een college Statistiek gevolgd heeft. Bijvoorbeeld

$$\int_{-1}^{1} \phi(x)dx \approx 0.68 \quad \int_{-1.65}^{1.65} \phi(x)dx \approx 0.90 \quad \int_{-1.96}^{1.96} \phi(x)dx \approx 0.95 \tag{7}$$

en natuurlijk $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$. Ook deze laatste identiteit, die aangeeft dat $\phi(x)$ daadwerkelijk een kansdichtheid is, kun je niet zo maar bewijzen. Het meest bekende bewijs maakt gebruik ervan dat $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(y)dxdy$, en dat de dubbele integraal door transformatie op poolcoordinaten in een integraal overgaat die dan wel een expliciete primitieve heeft.

Met behulp van (7) en de CLS kun je nu allerlei kansen approximatief berekenen. Bijvoorbeeld levert $a = -1.96, b = 1.96$ dat met ongeveer 95% kans geldt dat $np - 1.96\sqrt{np(1-p)} \leq S_n \leq np + 1.96\sqrt{np(1-p)}$. Gooi je dus $n = 100$ keer met een zuivere munt, dan zal in 95% van alle gevallen tussen 40 en 60 keer Kruis boven liggen. Of, als je in één keer 600 identieke dobbelstenen gooit, dan zal het totale aantal 'zessen' tussen $100 - 1.96\sqrt{500/6} = 82.1$ en $100 + 1.96\sqrt{500/6} = 117.9$ liggen, weer in 95% van alle gevallen.

7. De lengte van de langste run

Een aardig experiment om op school uit te voeren: vraag iedereen in de klas om een 'toevallige' rij van bijvoorbeeld 200 nullen en enen op te schrijven. Iedere scholier mag zelf bepalen of hij deze rij zelf verzinnen wil of met opgooien van een munt realiseren. De volgende dag kun je als docent -die uiteraard niet weet wie welke procedure gekozen heeft- vrijwel zeker zeggen welke van de rijen echte toevalsrijen zijn en welke door de scholieren verzonnen. De gedachte hierbij is dat een echte toevalsrij meer clusters zal vertonen dan een nagemaakte. Als je bijvoorbeeld naar de lengte van de langste run van nullen kijkt, dan zal die bij een echte toevalsrij veel langer zijn dan bij een nagemaakte. Voor de klassificatieprocedure moeten we dus een drempelwaarde k instellen en de getoonde rij als echt of nagemaakt klassificeren afhankelijk ervan of de langste nul-run langer is dan k of niet.

Om zo'n drempelwaarde te kunnen geven moeten we eigenlijk de verdeling van de lengte van de langste run van nullen in een symmetrisch Bernoulli-experiment kennen. Dan kunnen hij een waarde kiezen z.d.d. bijvoorbeeld slechts 5% van alle echte toevalsrijen geen nul-run van grotere lengte hebben. Op deze manier zijn we er in ieder geval zeker van dat we hooguit één op de 20 echte toevalsrijen voor nagemaakt klassificeren. Hoe vaak de andere fout voorkomt, namelijk een nagemaakte rij voor echte toeval door te laten gaan, hangt natuurlijk ervan af hoe de kinderen deze rijen maken.

Voor de verdeling van de lengte van de langste run is wel een exacte formule bekend, maar deze is volstrekt onhanteerbaar. Daarom zullen we hier gebruik maken van een Monte-Carlo simulatie om de verdeling te benaderen. Daartoe voeren we heel vaak 200 Bernoulli($\frac{1}{2}$)-experimenten uit en noteren telkens de lengte van de langste run van nullen. Vervolgens maken we een turflijst met de verkregen resultaten. Hier is het resultaat van 1000 simulaties:

lengte langste run	4	5	6	7	8	9	10	11	≥ 12
aantal experimenten	36	156	266	226	135	84	49	25	23

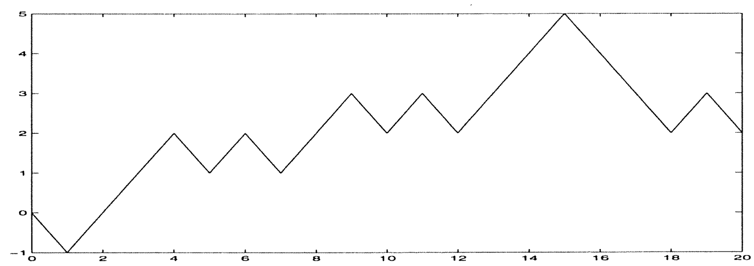
De langste run is dus slechts in 3.6% van onze experimenten kleiner dan 5 (merk op dat dit op slechts 1000 simulaties is gebaseerd, en bij herhaling wel iets anders kan uitvallen) en dus kunnen we als klassificatieregel hanteren dat we een rij als 'echt toevallig' accepteren als er minstens één run van 5 nullen in zit.

Er is ook allerlei onderzoek gedaan naar de asymptotiek van de verdeling van de lengte van de langste run van nullen, maar details daarvan gaan hier een beetje te ver. Wel is er voor grote n een gemakkelijk te onthouden regel voor de benaderde lengte van de langste run van nullen: $\log_2(n)$. Een intuïtief argument voor die formule gaat zo: als een run van k nullen in een rij van lengte n plaats heeft, dan verwacht je ook iedere andere vaste blok van k nullen en enen te vinden. Daarvan zijn er precies 2^k, en die moet je alle kunnen onderbrengen in de totale rij van lengte n wat $2^k \approx n$ oplevert.

8. Hoe vaak staat Birte voor?

Twee zusjes, we zullen ze om onduidelijke redenen maar Birte en Wiete noemen, spelen met een munt om flippo's. Als *Kop* verschijnt, krijgt Birte een flippo van Wiete en anders moet ze een afgeven. We noteren met R_k de netto-winst van Birte na k worpen, dus het overschot van *Kop* over *Munt* bij de eerste k worpen. In termen van de eerder geïntroduceerde stochasten is $R_k = 2S_k - k$. We bekijken nu even het spelverloop tot en met de $(2n)^e$ worp (dat we juist een even aantal kiezen heeft ermee te maken dat de wiskundige formules verderop daardoor eenvoudiger worden). We zeggen dat Birte in de periode $(k-1, k)$ voorop staat als $R_{k-1} > 0$ of $R_k > 0$ of allebei, met andere woorden als het pad dat de punten $(k-1, R_{k-1})$ en (k, R_k) met elkaar verbindt helemaal boven de x-as ligt. Een eerste simulatie van het spelverloop tot en met de 20^e worp ziet er uit als in figuur 9. In deze simulatie ligt Birte dus 18 van de 20 keren voorop.

Vanwege de symmetrie van dit spel zou je eigenlijk verwachten dat ongeveer de helft van de tijd Birte voorop ligt, en de andere helft Wiete, en dat dus de simulatie in figuur 9 een vrij extreme uitkomst leverde. Nu blijkt echter dat een evenredige verdeling juist zeer onwaarschijnlijk is en in tegendeel meestal één van de zussen een groot gedeelte van de tijd voorop staat. Dat zal natuurlijk weer in de helft van alle gevallen Birte, en in de andere helft Wiete zijn. Om wat meer gevoel voor de zaak te krijgen hebben we eerst even 1000 simulaties van spelverlopen gedaan en iedere keer gekeken in hoeveel periodes Birte voorop



FIGUUR 9. Simulatie van 20 muntworpen en de bijbehorende overschotten van *Kop* over *Munt*

stond. De resultaten hiervan staan in de volgende tabel (merk op dat Birte slechts een even aantal periodes voorop kan staan):

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
172	103	73	63	63	54	60	77	74	92	169

In ongeveer 17% van alle gevallen stond dus Birte de hele tijd voor, en in 34% stond één van de zussen de hele tijd voor. Een uitkomst zo extreem als in figuur 9 (dus 0 of 2 of 18 of 20) hebben we in meer dan de helft van alle gevallen. Een evenredige verdeling van het lot komt daarentegen slechts in 5% van alle gevallen voor. Merk wel op dat het hier om resultaten van een enkele simulatie gaat en je dus bij een herhaling iets andere getallen krijgen kunt. Om de zaak nog wat nauwkeuriger uit te zoeken hebben we vervolgens maar liefst 10,000 simulaties gedaan, met de volgende resultaten:

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1752	922	772	681	638	589	562	661	796	911	1716

Iets andere getallen dus, maar de belangrijkste boodschap blijft dat het verrassend vaak voorkomt dat één van de spelers een groot deel van de tijd voorop ligt.

Simulaties zijn wel heel leuk, maar in de wiskunde willen we eigenlijk toch exacte formules. Nu blijkt er inderdaad voor de theoretische kansen in het bovenstaand probleem een verrassend eenvoudige formule te bestaan. De kans dat Birte gedurende $2k$ periodes voorop staat is gegeven door

$$p_{2k} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2n}}.$$

Aangezien de kans op een vast verloop van het spel gelijk is aan 2^{-2n} betekent dit resultaat dat er precies $\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$ paden zijn die gedurende $2k$ perioden boven de x-as liggen. Dit zuiver combinatorisch resultaat is dan ook wat je bewijzen moet, maar dat voert hier even te ver. De middelen die je nodig hebt voor een bewijs zijn echter elementair en best aan een geïnteresseerde scholier uit te leggen. Je hoeft alleen iets van binomiaal-coëfficiënten te weten en er een slimme tel-truc bij te halen.

Ook is er een heel mooi asymptotisch resultaat voor de fractie van de tijd die Birte voorop ligt:

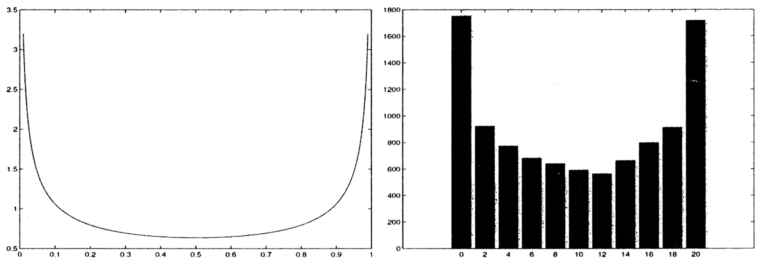
$$P\left(\frac{1}{2n} \times \text{aantal periodes waarin Birte voorop ligt} \leq x\right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

DEFINITIE 5 *De verdeling op* $[0,1]$ *met verdelingsfunctie* $F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$*, of met dichtheid*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$(0 < x < 1)$*, heet arcsin verdeling.*

De arcsin-verdeling heeft de bovenstaande en veel aanverwante resultaten hun naam gegeven: arcsin wetten. De limietstelling kunnen we dus zo formuleren: de fractie van tijd die Birte voorop ligt convergeert naar een arcsin verdeling als de spelduur naar oneindig gaat.



FIGUUR 10. Grafiek van de arcsin dichtheid $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$(links) en histogram van 10,000 simulaties (rechts)

In figuur 10 hebben we de dichtheid van de arcsin verdeling geschetst. Inderdaad valt op dat deze verdeling veel gewicht aan de omgeving van de meest extreme waarden 0 en 1 toekent. Dit correspondeert met onze experimentele waarneming dat vaak één van de zussen een groot gedeelte van de tijd voorop ligt. Rechts in deze figuur ter vergelijking met de arcsin wet een histogram van de resultaten van de 10,000 simulaties.

REFERENTIES

[1] DEHLING, H.G., J.N. KALMA (1995). *Kansrekening - het zekere van het onzekere.* Epsilon Uitgaven, Utrecht.

[2] FELLER, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Vol. 1, 3rd edition, Wiley, New York.

[3] REVESZ, P. (1990). *Random walk in random and non-random environments.* World Scientific, Singapore.

CWI Vakantiecursus 1997

pp. 51 – 64

Schatten

A.G.M. Steerneman
Rijksuniversiteit Groningen
Vakgroep Wiskunde
Postbus 800
9700 AV Groningen

1. Inleiding

1.1. Wat is statistiek?

Voordat we bespreken waar het in de statistiek om gaat, is het mogelijk verhelderend te beschrijven waar de leek aan denkt. Teneinde misverstanden te voorkomen, het woord leek is hier zeker niet denigrerend bedoeld: in concrete praktijkproblemen is de statisticus in eerste instantie de grootste leek. Als men eens een sportverslag meemaakt op de televisie, dan wordt men ook op de hoogte gehouden van diverse cijfermatige gegevens. Hieronder valt natuurlijk het scoreverloop, het aantal vrije trappen bij voetbal, het aantal goede eerste services bij tennis, tussentijden bij het schaatsen, etc. Het wil dan wel eens gebeuren dat dergelijke gegevens worden verstrekt met de aanloopzin: "Voor de statistici onder u..." Deze intro klopt niet. Ten eerste zijn vele niet-statistici zeer geïnteresseerd in dergelijke cijfers. Ten tweede zal een statisticus als hij voor zijn vermaak naar de tv kijkt zich niet aangesproken voelen op zijn professionele kwaliteiten en de gegevens nauwgezet registreren. Ten derde, en dat is het meer serieuze punt, statistici hechten weliswaar een enorm belang aan het meten en registreren van gegevens, maar het gaat hun veel meer om de analyse en de mogelijke conclusies die hierop gebaseerd kunnen worden. Leken zijn geneigd te denken dat een statisticus zich vooral bezig houdt met het zorgvuldig verzamelen van cijfers en deze zo helder mogelijk samen te vatten in de vorm van tabellen en grafieken.

Statistici zijn wel betrokken bij het verkrijgen van gegevens, maar het meten is in handen van degenen die het experiment uitvoeren of van enquêteurs. Dit is meestal slechts een onderdeel van het gehele proces waarbij een statisticus wordt betrokken. Waar het natuurlijk om draait, is dat men door middel van het doen van waarnemingen iets meer aan de weet wil komen over een concreet probleem dat niet meer uitsluitend kan worden opgelost door erover na te denken. Men kan denken aan vragen, zoals:

- Onder welke condities wordt de beste opbrengst verkregen van een bepaald soort gewas.

- Hoe kunnen we op basis van kleine steekproeven nagaan of een machine nog steeds producten maakt van goede kwaliteit. Merk op dat de inspectie van producten vaak leidt tot vernietiging ervan of dat inspectie van alle producten onmogelijk is omdat het er enorm veel zijn.

- Hoe groot is het aantal Nederlanders dat voorstander is van de EMU.

Onder het motto “meten is weten” worden er in het tijdperk van de informatietechnologie enorme databestanden aangelegd. Met behulp van statistische technieken proberen data-analisten nieuwe kennis te halen uit dergelijke enorm grote bestanden. Dit is geen eenvoudige zaak, want relaties die worden gevonden tussen zulke gegevens zijn vaak alleen gebaseerd op uitsluitend die cijfers. Het risico dat er een onzin-verband wordt aangetroffen is zeker niet denkbeeldig. Zo heeft men wel eens een relatie kunnen aantonen tussen het aantal ooievaars en het aantal geborenen in een jaar. Een ander voorbeeld is het verband tussen inflatie- en regenvalgegevens in Engeland. Men beweert wel eens dat met statistiek alles kan worden bewezen. Dit is wat overdreven, maar men kan wel stellen dat de interpretatie van statistisch materiaal het werk moet zijn van mensen die kennis hebben van de onderhavige problematiek en mensen die verstand hebben van de statistische problematiek. Het moet werk in teamverband zijn om onzinnige conclusies te vermijden. Dit brengt met zich mee dat de deelnemers aan zo’n team bereid moeten zijn van elkaar te leren. Het mooie van het werk van een statisticus is dat hij met problemen uit de meest uiteenlopende vakgebieden te maken krijgt.

Uit het voorgaande moge duidelijk zijn dat een statisticus in ieder geval heeft te maken met getallen en dat deze te maken hebben met een concrete probleemstelling. Voorts brengen deze getallen het probleem met zich mee dat ze slechts een heel beperkt licht op de vraagstelling kunnen werpen. Volgt men bijvoorbeeld een aantal patiënten in het kader van een medisch experiment, dan komt het geregeld voor dat er gegevens ontbreken. De arts heeft een keer vergeten de bloeddruk te meten, de patiënt is omgekomen bij een ongeval, het effect van een medicament hangt sterk van de patiënt af, etc. Waar het in de statistiek om gaat is dat men ruimer geldende conclusies wil trekken op basis van beperkt cijfermateriaal.

1.2. Statistische wetenschap

De statistische wetenschap houdt zich bezig met het ontwerpen van methoden en technieken ter bewerking van gegevens zodat men tot bepaalde typen conclusies kan komen. Een wezenlijk aspect is dat het niet alleen gaat om de conclusie maar ook om de betrouwbaarheid ervan. Er moet inzicht worden verschaft in de nauwkeurigheid van de resultaten. Dit is van belang voor degenen die op basis van allerlei overwegingen tot beslissingen moeten komen. De genoemde technieken worden weergegeven in de taal van de wiskunde. De statistische theorievorming is een wiskundige aangelegenheid. Het geheim van de statistiek is eigenlijk dat men onzekerheid en onnauwkeurigheid modelleert door te veronderstellen dat de data zijn gegenereerd door het toeval.

De veronderstelling van de rol van het toeval is slechts één van de veronderstellingen. De statisticus gaat meestal verder met het beschrijven van een model dat het toevalsproces beschrijft: bepaalde kansverdelingen worden aangenomen, waarin een aantal onbekende parameters voorkomen. Wiskunde, in het bijzonder de kansrekening, vormt de basis voor de huidige statistische theorie. In het vervolg van dit betoog zullen we op een eenvoudige wijze enig inzicht proberen te verschaffen hoe het een en ander in zijn werk gaat.

1.3. Schatten

De statistische wetenschap houdt zich bezig met het ontwerpen van methoden en technieken voor het toetsen van hypothesen, het schatten van modelparameters, het voorspellen van uitkomsten, etc. We zullen ons richten op het schattingsprobleem in diverse eenvoudige contexten. In de vorige paragraaf hadden we het over kansmodellen en onbekende parameters. Het komt erop neer dat we die onbekende parameters te weten willen komen. Het enige dat we hebben zijn de uitkomsten die we verzameld hebben. We gaan er vanuit dat die uitkomsten door het toeval zijn ontstaan en in de volgende hoofdstukken zullen we steeds aangeven hoe dat toevalsproces in elkaar zit. Essentieel is het begrip populatie. Op de een of andere manier zijn die uitkomsten uit een groter geheel afkomstig waarover we uitspaken willen doen. Dit grotere geheel noemen we een populatie.

We zullen in hoofdstuk 2 iets vertellen over de statistische theorie betreffende eindige populaties. Om een voorbeeld te geven: de populatie van alle inwoners van Amsterdam van 18 jaar en ouder. Dit kan van belang zijn voor het uitschrijven van een referendum. Het begrip populatie is niet zo eenvoudig. Wat is de definitie van inwoner? Hoort iemand die illegaal op kamers woont ook tot de populatie? Hoort iemand die zonder onderdak in de stad rondzwerft ook tot de inwoners? Men kan zeggen dat men zich moet baseren op het bevolkingsregister. Dit schijnt echter nogal wat fouten te bevatten. In de praktijk hanteert men voor enquêtes een steekproefkader, bijvoorbeeld een telefoonboek. Bij het extrapoleren van conclusies op basis van een steekproefkader naar de populatie waar men in feite belangstelling voor heeft, is voorzichtigheid geboden.

In hoofdstuk 3 zullen we het hebben over oneindige populaties. Een oneindige populatie ontstaat als men er vanuit gaat dat er bijvoorbeeld een experiment oneindig vaak kan worden uitgevoerd. Het eenvoudigste voorbeeld is het werpen met een munt. De mogelijke uitkomsten zijn kop of munt en als men doorgaat met experimenteren dan ontstaan er in principe oneindig veel uitkomsten. De fractie van het aantal keren kop in deze rij is onbekend. Door naar een beperkt deel te kijken kan men een idee krijgen van deze fractie. De manier waarop men dit experiment uitvoert is van belang. In het algemeen neemt men aan dat de kans op kop een half is. Als men de munt op zijn kant zet, het vervolgens laat tollen en beziet wat boven komt als de munt omvalt, dan schijnt deze kans niet gelijk aan een half te zijn. Munten zijn doorgaans enigszins conisch.

Hoofdstuk 4 sluit het betoog af en schetst enige uitbreidingen en verdere bespiegelingen.

2. Eindige populatie

2.1. Populatiegemiddelde

Laten we een eindige populatie van individuen $i = 1, \ldots, n$ beschouwen. Voor het gemak nemen we dus aan dat ze genummerd zijn. We zijn uitsluitend geïnteresseerd in hun lengte. Stel dat individu i lengte X_i heeft. Deze lengtes kennen we niet. We kunnen ze te weten komen door ze op te meten. Dit wordt gedaan bij een steekproef uit deze populatie. We kunnen ze niet allemaal opmeten. We willen nu de gemiddelde lengte weten van de individuen in deze populatie. Dit gemiddelde wordt gegeven door

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Als we nu een steekproef ter grootte n uit de populatie nemen, dan hebben we individuen met de nummmers $i_1, \ldots, i_n$. We zullen de individuen uit de steekproef aangeven met $j = 1, \ldots, n$. De lengte van individu j uit de steekproef heeft lengte

$$x_j = X_{i_j}.$$

De waargenomen lengtes zijn dus $x_1, \ldots, x_n$. Het ligt voor de hand dat we $\overline{X}$ willen schatten door het steekproefgemiddelde

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Of dit een goed idee is hangt af van de manier van experimenteren. Het experiment moet op de juiste manier het toeval een rol laten spelen. In de zojuist beschreven situatie zijn er twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is individuen aselect (volledig toevallig) te kiezen met teruglegging. Dit bespreken we in paragraaf 2.2. Een andere mogelijkheid is de individuen aselect te kiezen zonder teruglegging. Hierop komen we terug in paragraaf 2.4. In paragrafen 2.3 en 2.5 wordt het een en ander verder uitgewerkt als het gaat om uitkomsten die de aan- of afwezigheid van een kenmerk aangeven.

Een andere interessante parameter is de variantie in de populatie. Deze vormt een maatstaf voor de mate van gespreidheid van de lengtes in de populatie rondom het gemiddelde. Deze parameter is als volgt gedefinieerd

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2.$$

De standaarddeviatie is gelijk aan S. In de literatuur wordt in deze formule $N - 1$ wel eens vervangen door N; de variantie wordt in dat geval aangegeven met σ^2. Voor grote waarden van N maakt dit niet zoveel uit.

2.2. Trekken met terugleggen
In deze situatie trekt men aselect een getal uit de nummers $1, \ldots, N$. Men noteert het getrokken nummer en het nummer wordt weer teruggedaan. Bij iedere trekking is de kans op ieder van die nummers gelijk aan $1/N$. Voorts is het zo dat de trekkingen onafhankelijk zijn. De uitkomst van trekking k heeft geen enkele invloed op de andere uitkomsten. Als het experiment op deze wijze wordt uitgevoerd, dan is $\overline{x}$ een verstandige schatter voor $\overline{X}$. Waarom is dat zo? De schatter $\overline{x}$ is een zuivere schatter voor $\overline{X}$. Dit betekent dat

$$\mathrm{E}\,\overline{x} = \overline{X}.$$

De verwachtingswaarde van het steekproefgemiddelde is gelijk aan het populatiegemiddelde. In totaal hebben we N^n mogelijke steekproeven als we ook op de trekkingsvolgorde letten. Voorts hebben al die steekproeven dezelfde kans op realisatie. Als we nu het gemiddelde nemen van al die mogelijke steekproefgemiddelden, dan vinden we het populatiegemiddelde.

Op basis van de steekproef schatten we het populatiegemiddelde door het steekproefgemiddelde. Men moet goed beseffen dat een andere steekproef een andere schatting zal opleveren. Het ene steekproefgemiddelde zal dicht bij de werkelijkheid liggen, terwijl een andere er ver vanaf kan liggen. Het steekproefgemiddelde heeft een (onbekende) kansverdeling.

Het is van belang iets te kunnen zeggen over de nauwkeurigheid van het steekproefgemiddelde als schatter. Daartoe maakt men gebruik van de variantie:

$$\mathrm{Var}\,\overline{x} = \mathrm{E}\,(\overline{x} - \overline{X})^2$$

De variantie brengt tot uitdrukking hoever het steekproefgemiddelde gemiddeld genomen af zal liggen van het populatiegemidelde. Er geldt

$$\mathrm{Var}\,\overline{x} = \frac{1}{n} S^2.$$

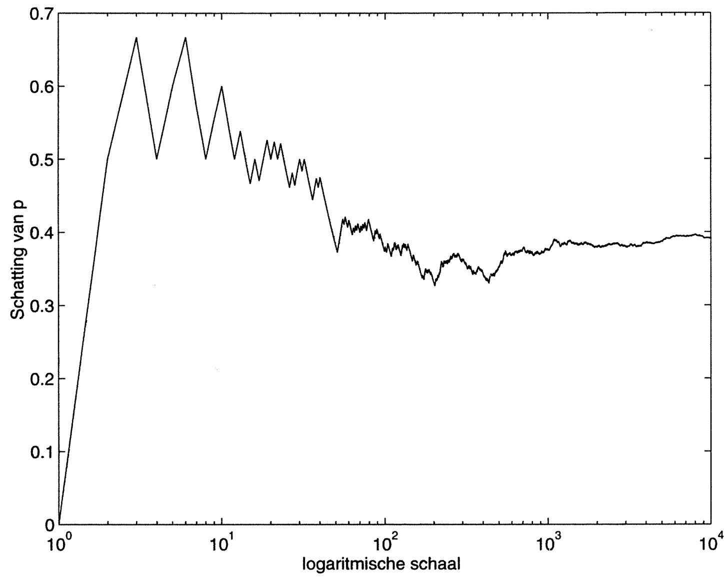
We zien uit deze formule dat het steekproefgemiddelde nauwkeuriger wordt als de steekproefomvang toeneemt. De werkelijke nauwkeurigheid kennen we niet want S^2 kennen we niet, zoals we $\overline{X}$ ook niet kennen.

Zoals we in het voorgaande het populatiegemiddelde schatten door het steekproefgemiddelde, zo gaan we nu de populatievariantie S^2 schatten door de steekproefvariantie

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2.$$

Dit is een zuivere schatter voor S^2. Om een interval te geven dat met grote betrouwbaarheid het werkelijke populatiegemiddelde zal bevatten, wordt gebruik gemaakt van

$$[\,\overline{x} - 2s/\sqrt{n}, \overline{x} + 2s/\sqrt{n}\,].$$



FIGUUR 1. De figuur laat een simulatie zien waarbij er Bernoulli-experimenten zijn gedaan met kans op succes $p = 0.4$. Deze kans wordt telkens opnieuw geschat als er weer een waarneming bij komt. Uit de figuur valt af te lezen dat de eerste trekking een mislukking was. Voor grote waarden van n ziet men de werking van de wet van de grote aantallen.

Dit betrouwbaarheidsgebied zal het populatiegemiddelde bevatten met een kans van bij benadering 95%. Hoe groter de steekproef genomen zal worden, hoe smaller dit interval wordt. In de volgende paragraaf zullen we het speciale geval bekijken van een populatie waar het niet gaat om een continu gemeten grootheid zoals lichaamslengte, maar om de aan- of afwezigheid van een bepaald kenmerk.

2.3. Trekken met teruglegging: dichotome variabele

Met het woord dichotoom wordt tweedeling bedoeld. Als men een populatie van individuen beschouwd, dan zal het geslacht een belangrijk kenmerk vormen. De variabele geslacht krijgt de waarde 0 als het individu een man is en 1 als het om een vrouw gaat. Het populatiegemiddelde is nu de fractie vrouwen in de populatie, aan te geven met p. Als we nu een aselecte steekproef met teruglegging nemen uit deze populatie dan is de steekproeffractie een zuivere schatter voor de populatiefractie. Laat deze onafhankelijke steekproef aangeduid worden met $X_1, \ldots, X_n$. Nu geldt dat de X_j een zogenaamde Bernoulli-verdeling volgen met succeskans p, ofwel

$$\mathrm{P}\{X_j = 1\} = p \text{ en } \mathrm{P}\{X_j = 0\} = 1 - p \text{ voor } j = 1, \ldots, n.$$

Een en anderw wordt geïllustreerd in Figuur 1. Voor het totaal X geldt dat het een binomiale verdeling volgt:

$$\mathrm{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{voor} \quad j = 1, \dots, n.$$

In symbolen:

$$X \sim B(n, p).$$

Dit is een heel bekende verdeling die ook van toepassing is op experimenten zoals het opgooien van munten en het tellen van het aantal keren "kop".

Voor de volledigheid geven we nog even de populatieparameters:

$$\overline{X} = p,$$

$$S^2 = \frac{N}{N-1} p(1-p).$$

De respectievelijke zuivere schatters zijn:

$$\overline{x} = \hat{p} = X/N,$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \hat{p}(1-\hat{p}).$$

Men kan deze formules afleiden uit die van de vorige paragraaf door gebruik te maken van de formule $x^2 = x$ als $x \in \{0, 1\}$.

2.4. Trekken zonder teruglegging

Als er steekproeven getrokken moeten worden uit eindige populaties, dan is het trekken met teruglegging niet de meest verstandige aanpak. In het geval van grote populaties is de kans op het selecteren van een individu dat reeds in de steekproef zat heel klein. In het geval van redelijk kleine populaties maakt het echter wel uit. We houden dezelfde notaties aan als in de vorige paragrafen. In deze paragraaf nemen we dus aan dat de steekproef is getrokken zonder teruglegging. Merk op dat in dit geval de trekkingen niet onafhankelijk zijn. Dit kan men als volgt inzien. Het totaal aantal mogelijke steekproeven is $\binom{N}{n}$. Er zijn $\binom{N-1}{n-1}$ mogelijke steekproeven waar individu 1 in zit. Dit geldt ook voor individu 2. Er zijn $\binom{N-2}{n-2}$ mogelijke steekproeven waar individu 1 en 2 in zitten. Op deze wijze vinden we

$$\mathrm{P}\{1 \text{ wordt getrokken}\} = \mathrm{P}\{2 \text{ wordt getrokken}\} = \frac{n}{N}$$

$$\mathrm{P}\{1 \text{ en } 2 \text{ worden getrokken}\} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}.$$

Dus de kans dat zowel 1 als 2 in de steekproef zullen komen is niet het product van de kans dat 1 erin komt en de kans dat 2 erin komt.

Men kan wel aanvoelen dat trekken zonder teruglegging beter is. Immers, als men een individu voor de tweede keer selecteert, dan wordt er geen nieuwe informatie verkregen. Ook in het geval van trekken zonder teruglegging wordt het populatiegemiddelde geschat door het steekproefgemiddelde. Voor de variantie van het steekproefgemiddelde is er de volgende formule:

$$\operatorname{Var} \bar{x} = (1-f)\frac{S^2}{n},$$

waarin

$$f = \frac{n}{N}$$

de zogenaamde steekproeffractie is en $1-f$ de eindigheidscorrectie wordt genoemd. Men ziet dat deze correctiefactor ongeveer 1 is als de populatiegrootte oneindig groot wordt. Als de steekproeffractie niet verwaarloosbaar klein is, dan is de variantie van het steekproefgemiddelde in het geval van trekken zonder teruglegging $1-f$ keer de variantie van het steekproefgemiddelde in het geval van trekken met terugleggen. Men zegt dat trekken zonder teruglegging efficiënter is. Met deze trekkingstechniek wordt er een nauwkeuriger schatter verkregen tegen dezelfde kosten. Dit illustreert op eenvoudige wijze dat het opzetten van steekproeven en experimenten op een verstandige wijze moet gebeuren. Dit kan kostenbesparend werken en men kan veel meer informatie uit de betreffende gegevens halen. In de praktijk wordt er veel gebruik gemaakt van de techniek van statistische proefopzetten bijvoorbeeld bij het veredelen van gewassen.

Een bij benadering 95% betrouwbaarheidsgebied voor het populatiegemiddelde wordt gegeven door

$$[\bar{x} - 2\sqrt{(1-f)\frac{s^2}{n}}, \bar{x} + 2\sqrt{(1-f)\frac{s^2}{n}}]$$

In de volgende paragraaf gaan we in op het trekken zonder terugleggen in het geval van een dichotome variabele.

2.5. Trekken zonder terugleggen: dichotome variabele

Als we teruggaan naar de populatie van mannen en vrouwen uit paragraaf 2.3, dan gebruiken we weer X om het totaal aantal vrouwen uit de steekproef aan te geven. Logischerwijze is $n - X$ dan het aantal mannen in de steekproef. Om pathologie te vermijden nemen we aan dat de steekproefgrootte en de aantallen mannen M en vrouwen V in de populatie zodanig zijn dat de steekproef in theorie volledig uit mannen zou kunnen bestaan, maar ook volledig uit vrouwen. Dus we nemen aan dat $n \leq M$ en $n \leq V$. De kansverdeling van X is een zogenaamde hypergeometrische verdeling en wordt gegeven door

$$\mathrm{P}\{X = k\} = \frac{\binom{V}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{voor } k = 0, \ldots, n.$$

Merk op dat in deze formule M en V onbekend zijn. We zijn benieuwd naar V/N. De gebruikelijke schatter is $\hat{p} = X/n$.

Deze verdeling wordt bijvoorbeeld gebruikt in de statistische kwaliteitszorg. Een afnemer verlangt van een partij producten dat het aantal defecten klein is. Op basis van een steekproef uit deze partij moet dan worden beoordeeld of deze partij kan worden afgeleverd of dat er mogelijk teveel defecten in zitten.

In het geval van niet al te grote partijen en kleine steekproeven wordt dan de hypergeometrische verdeling gebruikt om vast te stellen bij welke aantallen defecten de kans op het ten onrechte doorsturen van de partij bijvoorbeeld kleiner dan 0.1% is.

In veel productieprocessen gaat het echter om heel grote partijen. In dat geval gaat trekken zonder teruglegging veel lijken op trekken met teruglegging en gebruikt men de binomiale kansverdeling $X \sim B(n,p)$, waarin p de fractie defecten is. In het geval van de populatie mannen en vrouwen benaderen we dus met een binomiale verdeling met $p = V/N$.

Afhankelijk van de waarden van n en p wordt de binomiale verdeling op haar beurt weer benaderd door een normale verdeling. Hierop komen we terug in hoofdstuk 3.

3. Oneindige populaties

3.1. Inleiding

In veel toepassingen van de statistiek gaat men er vanuit dat men trekt uit een oneindig grote populatie. Bij iedere trekking die men doet wordt er meer inzicht verkregen in de samenstelling van die populatie. Zo wordt er door herhaald met dezelfde munt te werpen steeds meer duidelijkheid verkregen over het relatieve aantal keren dat er "kop" boven komt. De uitkomsten van deze experimenten zijn nullen en enen. De populatie is in dit geval discreet: er zijn per experiment maar twee mogelijke uitkomsten. Als X de uitkomst aangeeft van een trekking uit deze populatie dan noteren we $X \sim B(1,p)$ (zie paragraaf 2.3).

Als we van de munt naar de vrouwen van tussen de 20 en 40 jaar gaan en naar lichaamslengte kijken, dan is de uitkomst een reëel getal. Als we een relatieve frekwentieverdeling van deze lichaamslengtes zouden maken, dan blijkt deze verdeling heel goed benaderd te kunnen worden met een continue curve van de vorm

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}).$$

Dit is de dichtheid van de zogenaamde normale verdeling met parameters μ en σ^2; in symbolen $N(\mu, \sigma^2)$. De genoemde parameters kennen we meestal niet en die zouden we natuurlijk willen schatten op basis van een steekproef. De fractie vrouwen met een lengte tussen 1.6 en 1.8 wordt nu verkregen als de oppervlakte onder de normale curve tussen 1.6 en 1.8. Noteert men voor een toevallige trekking X, (in symbolen: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), dan is de genoemde fractie de kans dat X tussen 1.6 en 1.8 ligt: $\mathrm{P}\{1.6 \leq X \leq 1.8\}$. We hebben hier te maken met een continu verdeelde populatie. De verwachtingswaarde in de populatie is μ en de variantie is σ^2.

In het bovenstaande voorbeeld werd geïllustreerd dat de normale verdeling in de praktijk nuttig kan zijn ter beschrijving van een populatie. Er is echter nog een andere reden waarom deze verdeling zo enorm belangrijk is in de statistiek. Dit heeft te maken met de centrale limietstelling. Deze stelling heet zo vanwege de centrale rol die deze stelling vervuld. In het voorgaande speelde het gemiddelde een belangrijke rol. We zullen zien dat dit algemener ook geldt. In de statistiek maken we dankbaar gebruik van de resultaten uit de kansrekening. In paragraaf 3.2 gaan we in op de rol van het steekproefgemiddelde. In paragraaf 3.3 wordt de normale verdeling op statistische wijze aangewend.

3.2. Het steekproefgemiddelde

In de inleiding van hoofdstuk 3 werden er twee populaties beschreven. De verdelingen waren in principe bekend op de parameters na. We kenden de waarde van p niet, maar ook de waarden van μ en σ^2 niet. Zowel p als μ zijn de gemiddelden (verwachtingswaarden) in de respectievelijke populaties. Men voelt het al wel aankomen, als we deze parameters moeten schatten op basis van experimenten, dan zal het steekproefgemiddelde wel een goed idee zijn. We gaan nog een stapje verder. In de praktijk kennen we de vorm van de kansverdeling niet eens en zou de specificatie van normaliteit bijvoorbeeld volstrekt fout kunnen zijn. In het volgende gaan we uit van een oneindige populatie met verwachting μ en variantie σ^2. Als $X_1, \ldots, X_n$ nu de toekomstige uitkomsten aangeven van n onafhankelijke trekkingen uit deze populatie, dan is het steekproefgemiddelde $\overline{X}$ een aardige schatter. In oneindige populaties wordt $\overline{X}$ gebruikt als steekproefgemiddelde. In eindige populaties is dit $\overline{x}$. Het steekproefgemiddelde is een zuivere schatter voor μ en de nauwkeurigheid wordt gegeven door

$$\operatorname{Var}\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

We zien hieruit dat hoe groter de steekproef wordt, hoe nauwkeuriger het steekproefgemiddele wordt. Hoe groot die steekproef moet zijn is een andere vraag.

De kansrekening leert ons dat hoe groter de steekproef wordt, hoe groter de kans is dat het steekproefgemiddelde in de buurt van het populatiegemiddelde komt te liggen. Dit is de zogenaamde zwakke wet van de grote aantallen. Voor elke $\epsilon > 0$ gaat de kans dat $|\overline{X} - \mu| \leq \epsilon$ naar 1 als n naar oneindig gaat. Dit kan men bijvoorbeeld zien uit de volgende toepassing van de ongelijkheid van Chebyshev:

$$\mathrm{P}\{|\overline{X} - \mu| \geq c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} \leq \frac{1}{c^2}.$$

Als we dus een populatie hebben met variantie gelijk aan 1 en we willen dat het steekproefgemiddelde met een kans van hoogstens 5% meer dan 0.2 afwijkt van het populatiegemiddelde, dan moeten c en n zó worden gekozen dat

$$\frac{1}{c^2} = 0.05$$

en

$$\frac{c}{\sqrt{n}} = 0.2.$$

Dit levert $n = 500$ en $c = 4.47$. Dit geldt dus ongeacht de verdeling in de populatie (zolang de verwachting en variantie maar gedefinieerd zijn, natuurlijk). Dit is dus een aanzienlijke steekproef. Als de variantie vier maal zo groot zou worden, dan zou de steekproef tweemaal zo groot moeten worden om aan dezelfde eisen te voldoen. Dit voorbeeld illustreert hoe op basis van statistische overwegingen kan worden vastgesteld hoe groot een steekproef moet zijn als men een bepaalde betrouwbaarheid wenst te bereiken. In de praktijk wordt de omvang van steekproef vastgesteld op basis van betrouwbaarheids- en kostenoverwegingen.

Over het algemeen wordt met de geschetste methode een waarde voor n gevonden die meestal nogal ruim is. In de volgende paragraaf komen we hierop terug na de centrale limietstelling te hebben besproken.

3.3. Centrale limietstelling

De centrale limietstelling verklaart waarom de normale verdeling zo'n belangrijke rol speelt in de statisiek. Stel dat we enorm vaak een steekproef ter grootte n zouden trekken uit de bovengenoemde populatie. Van de uitkomsten van al die gemiddelden kunnen we weer een relatief frekwentiehistogram maken, zoals dat ook gebeurde voor de lichaamslengten van vrouwen tussen de 20 en de 40 jaar in paragraaf 3.1. Op deze manier vinden we de kansverdeling van het steekproefgemiddelde. De centrale limietstelling zegt nu dat deze verdeling voor grote waarden van n door een normale verdeling benaderd mag worden. In veel gevallen is de benadering al heel redelijk voor $n = 30$. Bij benadering geldt dan dat $\overline{X}$ bij benadering een normale verdeling volgt met verwachtingswaarde μ en variantie σ^2/n. In symbolen:

$$\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

Teruggaande naar het voorbeeld uit de vorige paragraaf vinden we met behulp van de benadering door de normale verdeling dat $c = 1.96$ en $c/\sqrt{n} = 0.2$. Hieruit volgt dat $n = 97$. Dit scheelt enorm in vergelijking met de uitkomst van 500 die eerder was verkregen. In de praktijk zal de normale benadering goed genoeg zijn voor $n = 97$.

De centrale limeitstelling speelt dus een dubbele rol. Ze kan worden gebruikt om een idee te krijgen van de gewenste steekproefomvang en ze wordt gebruikt om een betrouwbaarheidsgebied voor het populatiegemiddelde μ te geven. Heel bekend is natuurlijk het 95% betrouwbaarheidsgebied

$$[\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}].$$

Merk op dat er eigenlijk stilzwijgend van wordt uitgegaan dat σ^2 bekend is. Dit zal meestal echter niet geval zijn. In de praktijk gebruikt men de steekproefvariantie S^2 om σ^2 te schatten. (In het geval van een eindige populatie werd s^2 gebruikt.) Bij onbekende populatievariantie zal ingeval de steekproefgrootte niet te klein is het genoemde interval worden gebruikt waarin σ^2 wordt vervangen door S^2. Sommigen vervangen dan het getal 1.96 door 2, omdat 1.96 een soort van schijnnauwkeurigheid is.

Als we $\overline{X}$ standaardiseren, hetgeen wil zeggen dat we nemen

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

dan heeft Z een verwachtingswaarde gelijk aan 0 en de variantie van Z is gelijk aan 1. In het geval van een normaal verdeelde populatie geldt dat Z een standaardnormale verdeling volgt. Deze verdeling is uitgebreid getabelleerd. In het geval van een normaal verdeelde populatie met onbekende variantie zal men niet Z gebruiken, maar

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}.$$

Voor niet al te kleine waarden van n heeft t bij benadering dus een standaardnormale verdeling. Wanneer, zoals gesteld, de onderliggende populatie een normale is, dan volgt t een andere bekende verdeling, namelijk Student's t_{n-1} verdeling. We zullen hier niet verder op ingaan, maar in het geval van een normaal verdeelde populatie en een kleine steekproef wordt deze verdeling gehanteerd om bijvoorbeeld betrouwbaarheidsgebieden te maken voor het populatiegemiddelde. In de volgende paragraaf passen we de centrale limietstelling toe op de binomiale verdeling.

3.4. Normale benadering van de binomiale verdeling

Als $X \sim B(n,p)$, dan zou men als benadering voor de verdeling van $\hat{p}$ de normale verdeling kunnen nemen:

$$\hat{p} \approx N(p, p(1-p)/n).$$

Dit is equivalent met

$$X \approx N(np, np(1-p)).$$

Voor grote waarden van n is dit een goede benadering. Toch moet men bij kleinere steekproeven oppassen met deze benadering. Hier speelt namelijk ook nog dat een discrete verdeling benaderd wordt door een continue. Zo geldt natuurlijk dat $\mathrm{P}\{2.3 \leq X \leq 2.9\} = 0$. Bij het gebruik van de normale benadering zou hier een strikt positief antwoord uitkomen. Met behulp van de continuïteitscorrectie wordt hier rekening mee gehouden op de volgende manier. Als k een niet-negatief, geheel getal is, dan kan men k opvatten als een afronding van elk getal uit het interval $[k-1/2, k+1/2)$. De kans $\mathrm{P}\{X = k\}$ wordt nu benaderd door de kans op dit interval uit te rekenen met behulp van de benaderende normale verdeling. In de praktijk wordt als vuistregel gebruikt dat men de normale verdeling als benadering gebruikt als zowel $np \geq 6$ en $n(1-p) \geq 6$. Om de benadering te verbeteren kan men de genoemde correctie nog toepassen.

Om een voorbeeld te geven gaan we uit van $X \sim B(20, 0.3)$. We berekenen $\mathrm{P}\{X \leq 3\}$. Met behulp van de binomiale verdeling vindt men het exacte antwoord 0.1071. De normale benadering geeft 0.0721. Met continuïteitscorrectie wordt het antwoord 0.1121 verkregen. Enige voorzichtigheid met deze benaderingen is echter wel geboden.

Voor grote waarden van n en hele kleine waarden van p is een benadering met behulp van de Poisson-verdeling aan te bevelen. De Poisson-verdeling heeft de volgende kansverdeling:

$$\mathrm{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{voor } k = 0, 1, \ldots$$

Deze verdeling wordt vaak toegepast om aantallen ongelukken te modelleren. Het Poisson-model wordt gebruikt om het aantal gebeurtenissen te modelleren als de kans op een enkele gebeurtenis relatief klein is. De verwachte waarde van de Poisson-verdeling is gelijk aan de variantie en is gelijk aan λ. Dus een benadering door middel van een Poisson-verdeling is redelijk als we een binomiale verdeling hebben waarvoor verwachting np en variantie $np(1-p)$ ongeveer gelijk zijn. Hieruit valt al op te maken dat $1 - p \approx 1$. In het bovenstaande rekenvoorbeeld is de Poisson-benadering geen goed idee: het antwoord zou 0.1512 geweest zijn. Stel dat bijvoorbeeld $X \sim B(100, 0.01)$. Dan vinden we voor $\mathrm{P}\{X = 3\}$ via de exacte formule het antwoord 0.0610. Benaderen door een Poisson-verdeling met parameter $\lambda = np = 1$ levert 0.0613.

De Poisson-verdeling wordt bijvoorbeeld toegepast in de statistische kwaliteitszorg en in wachttijd modellen.

4. Tot besluit

In het voorgaande is onder eenvoudige modelveronderstellingen geschetst hoe men bepaalde model-parameters kan schatten en hoe men daarbij tot uitspraken kan komen over de betrouwbaarheid. Dit gebeurde voor zowel eindige populaties als voor oneindige populaties. In de standaardliteratuur wordt de eerste categorie vaak vergeten, terwijl bijvoorbeeld in opinie-onderzoeken nogal eens van eindige populaties wordt uitgegaan. We hebben geprobeerd op elementaire wijze de statistische gedachtengang te schetsen in sterk vereenvoudigde situaties. Het is goed nogmaals te benadrukken dat de statisticus er nog niet is als hij bepaalde populatieparameters op handige wijze weet te schatten. Hij moet ook een beeld geven van de betrouwbaarheid van zijn schatters. Op deze wijze kan men een afweging maken op basis van de aanwezige onzekerheden.

Vaak is het zo dat populaties meer structuur bezitten. Over het algemeen meet men per individu veel meer kenmerken. De statisticus moet dan proberen de onderliggende samenhang tussen de diverse variabelen te modelleren. Een andere invalshoek is dat de populatie in logische delen kan worden opgesplitst. In het geval van mensen kan men de populatie opgedeeld zien in twee, zogeheten, strata: mannen en vrouwen. Binnen die strata kunnen allerlei achtergrondkenmerken nog een rol spelen. Ter illustratie geven we een gestyleerd voorbeeld. Zij $Y = 1$ als een individu aan longkanker overlijdt en zij $Y = 0$ als dit niet zo is. Het model zou kunnen zijn $Y \sim B(1, p)$. Dit is geen goed model, want het optreden van longkanker kan samenhangen met het geslacht, rookgewoontes, en dergelijke. Toch gebruikt men vaak dit type model in een uitgebreidere vorm. Men maakt gebruik van het zogenaamde logistische model; men probeert een geschikte functie te vinden voor

$$\log \frac{p}{1-p},$$

de "log odds ratio" geheten, waarin p dan wordt opgevat als een functie van de variabelen die betrekking hebben op de relevante achtergrondkenmerken. In de praktijk is dit meestal een lineaire functie.

Tegenwoordig worden heel veel (cijfermatige) gegevens in computerbestanden opgeslagen. Het gaat soms om enorm grote bestanden. De vragen die men er bij stelt zijn steevast welke kennis er aan ontleend kan worden. De statistische wetenschap ontwikkelt nieuwe methoden en technieken teneinde nieuwe vragen uit wetenschap en samenleving te kunnen oplossen. Het wezen van het vak is nog steeds onveranderd: hoe kunnen conclusies getrokken worden uit onvolledige en onnauwkeurige gegevens. Dit geldt eveneens als er erg veel gegevens zijn. Men krijgt dan te maken met de zogenaamde vloek van de dimensionaliteit. Door overinformatie ontstaat het risico dat wat echt belangrijk is versluierd wordt door een overmaat aan irrelevante gegevens.

Het aardige is dat zelfs oude ideeën nieuw leven krijgen ingeblazen. Statistici houden zich nog steeds bezig met schatten en voorspellen van kansen op "succes". Misschien is het de individualisering van de samenleving wel die ertoe lijdt dat men tegenwoordig individuele succeskansen probeert te voorspellen op basis van persoonskenmerken.

CWI Vakantiecursus 1997

pp. 65 - 82

Wachttijden en Wachtrijen

J.H.A. de Smit

Universiteit Twente, Fac. Toegepaste Wiskunde, Postbus 217, 7500 AE Enschede

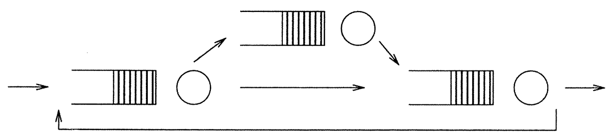
Samenvatting

Wachten is een verschijnsel waarmee ieder van ons dagelijks te maken heeft. Wachten op iemand met wie je een afspraak hebt, wachten bij een verkeerslicht of op de trein, wachten bij de dokter of in de supermarkt, maar ook wachten op een telefoonverbinding of op een aangeklikte pagina op het World Wide Web. Een niet onbelangrijk deel van ons leven gaat verloren met wachten en het is dan ook niet verbazingwekkend dat veel wiskundigen getracht hebben meer inzicht te krijgen in dit fenomeen.
Ook op minder in het oog springende toepassingsgebieden speelt wachten een grote rol. Daarbij kan men denken aan flexibele productiesystemen, waarin producten moeten wachten om een bepaalde bewerking te kunnen ondergaan. Zulke systemen treft men onder meer aan in de moderne automobielindustrie, waarin auto's van verschillende typen en uitvoeringen op dezelfde productielijn worden gemaakt. Het gaat erom de klant een product met de gewenste specificaties te kunnen leveren binnen een zo kort mogelijke levertijd.

1. Een stukje geschiedenis

De Deense wiskundige Agner Krarup Erlang (1878-1929) wordt algemeen beschouwd als de grondlegger van de wiskundige theorie van het wachten. Hij was werkzaam bij de Telefoon Maatschappij van Kopenhagen. In die periode werden de telefonistes vervangen door de eerste automatische telefooncentrales. De vraag rees naar de gewenste capaciteit van zulke centrales om te zorgen dat de blokkeringskans, dus de kans om geen verbinding te krijgen, voldoende klein zou zijn. In de periode van 1909 tot 1920 publiceerde hij een reeks van artikelen (bijna allemaal in het Deens) waarmee hij de basis legde voor deze theorie. Sindsdien hebben vele grote wiskundigen op het terrein van de kansrekening zich intensief bezig gehouden met de verdere ontwikkeling van het vakgebied: A. Kolmogorov (vanaf 1934), W. Feller (1939), J.L. Doob, B.V. Gnedenko, D.G. Kendall, om er enkele te noemen.
Het artikel van Feller uit 1939 ([2]) markeerde een belangrijke doorbraak. Uit de titel blijkt al dat het helemaal niet gaat over wachten maar over de evolutie van een biologische populatie. In zijn artikel introduceerde Feller een klasse van stochastische processen, die nu bekend staat als Geboorte- en Sterfteprocessen. Wiskundig gezien bleken die tot dezelfde klasse te behoren als de processen die

FIGUUR 1. Een wachtsysteem met één loket



FIGUUR 2. Een netwerk van wachtsysteemen

Erlang 30 jaar eerder had geanalyseerd.
In de vijftiger en zestiger jaren beleefde de wachttijdtheorie een sterke bloei. De aandacht ging met name uit naar processen die meer algemeen van aard waren dan de eerder genoemde geboorte- en sterfteprocessen. In zijn artikel uit 1953 voerde Kendall [4] een notatie in om de verschillende modellen van elkaar te onderscheiden. Hij ging daarbij uit van een wachtsysteem met één of meer loketten, maar slechts één wachtrij. (Een situatie die in andere landen, zoals de VS, gangbaar is.). In zijn notatie geeft het eerste symbool de aard van het aankomstproces aan, het tweede symbool de verdeling van de bedieningsduren en het derde symbool het aantal loketten. Zo is $M|M|s$ een wachtsysteem met s loketten, een Poisson aankomst proces en exponentieel verdeelde bedieningsduren. De M staat hier voor Markovian. Veel aandacht ging in die periode uit naar het wachtsysteem met één loket, in Kendall's notatie $G|G|1$, waarbij G de afkorting is van 'General'. De studie van dit model culmineerde in 1969 in het zeer lijvige boek van Cohen ([1]).

Door de opkomst van nieuwe toepassingsgebieden, met name moderne telecommunicatienetwerken en flexibele productiesystemen, heeft het vakgebied in de tachtiger jaren een nieuwe impuls gekregen. De modellen voor enkelvoudige wachtsystemen bleken niet langer toereikend om vragen uit de praktijk te beantwoorden. De studie van netwerken van wachtsystemen, waarbij klanten zich van het ene wachtsysteem naar het andere bewegen nam een grote vlucht. Het boek van Kelly ([3]) is de eerste systematische inleiding in dit onderwerp.

De wachttijdtheorie heeft altijd twee gezichten gehad: enerzijds richt ze zich op de oplossing van concrete praktische problemen, anderzijds geeft ze aanleiding tot de ontwikkeling van fundamentele inzichten. Typerend is dat de wachttijdtheorie gebruik maakt van veel andere takken van de wiskunde en soms ook aan de ontwikkeling daarvan bijdraagt. Voorbeelden zijn de theorie van orthogonale polynomen, de theorie van Wiener-Hopf integraalvergelijkingen en uiteraard de kansrekening. Zo is de ontwikkeling van de theorie van de stochastische processen in belangrijke mate terug te voeren op dit toepassingsgebied. Op dit moment is de wachttijdtheorie een bloeiend onderzoeksterrein, zoals ook blijkt uit de vele nieuwe boeken en tijdschriften, die geheel of gedeeltelijk aan dit vakgebied gewijd zijn.

2. Een kennismaking

Deze uiteenzetting is bedoeld als een eerste kennismaking met de wachttijdtheorie. Ik wil u iets laten zien van de problemen waarmee dit vak zich bezig houdt en de wijze waarop die problemen worden aangepakt. Daarbij wil ik zo min mogelijk teruggrijpen op (voor)kennis van kansrekening en stochastische processen. Een deel van die voorkennis zal ik hier bespreken. Dat geldt voor enkele onderwerpen uit de kansrekening, die essentieel zijn voor de wachttijdtheorie: de Poisson-verdeling, het Poisson-proces en de exponentiële verdeling. Voor wie zich verder wil verdiepen in het onderwerp zijn er tal van goede (en minder goede) boeken. Twee boeken die ik zou willen aanbevelen zijn die van Ross ([5] en [6]). Het eerste besteedt veel aandacht aan de toepassingen, het tweede is meer theoretisch van aard en gaat dieper.

3. De Poisson-verdeling

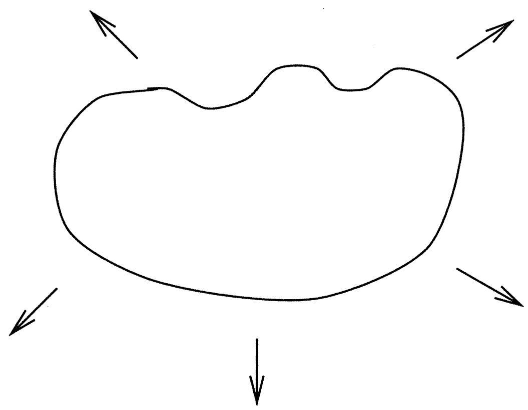
We hebben een toevalsexperiment met twee mogelijke uitkomsten: S(ucces) en M(islukking). De kans op S is p, dus de kans op M is $q = 1-p$. Een voorbeeld van zo'n experiment is het werpen van een munt, waarbij de uitkomst kruis overeenkomt met S en de uitkomst munt met M. Als de munt 'zuiver' is zal $p = 0,5$ zijn. Nu gaan we het experiment een aantal keren, zeg n, onafhankelijk van elkaar herhalen en tellen het aantal successen dat daarbij optreedt. Als we dit aantal aanduiden met de toevalsvariabele X, dan heeft deze toevalsvariabele een binomiale verdeling met parameters n en p. Voor de kans $p_k = P(X = k)$ hebben we dan de volgende uitdrukking:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, ...n.$$

Het verwachte aantal successen $E(X)$ is gelijk aan np.
Er zijn veel verschijnselen die beschreven kunnen worden met een binomiaal verdeelde toevalsvariabele, waarbij n heel groot is en p heel klein.

Voorbeelden

Een verzekeringsmaatschappij verzekert vliegtuigen. Het totaal aantal verzekerde vliegtuigen is 1000. Gemiddeld storten er van die 1000 3 per jaar neer. Als we aannemen dat alle vliegtuigen gelijke kans hebben om in een bepaald jaar, zeg 1998, neer te storten en dat ze ook onafhankelijk van elkaar neerstorten, dan heeft de toevalsvariabele X die het aantal neergestorte vliegtuigen



FIGUUR 3. Een stuk radioactief materiaal

in 1998 aangeeft, een binomiale verdeling met parameters 1000 en 0.003, immers de verwachting van X is $np = 3$. De verzekeringsmaatschappij is nu geïnteresseerd in de kans dat er in 1998 niet meer dan 5 vliegtuigen zullen neerstorten, dus in

$$P(X \leq 5) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5,$$

waarbij

$$p_k = \binom{1000}{k} 0,003^k \, 0,997^{1000-k}, \quad k = 0, 1, ..., 5.$$

Deze kansen zijn nog wel uit te rekenen hoewel er wel problemen met de nauwkeurigheid zouden kunnen optreden.

Beschouw een stuk radioactief materiaal met een halveringstijd van ongeveer 800 jaar. Dat betekent dat na 800 jaar de straling gehalveerd is. Die straling bestaat uit deeltjes die onafhankelijk van elkaar uittreden. Zoals we later zullen zien betekent dit dat de kans dat een willekeurig deeltje tijdens een willekeurige periode van één uur uittreedt gelijk is aan 10^{-7}. We meten de straling, d.w.z. het aantal uittredende deeltjes, gedurende een uur en herhalen deze meting een aantal keren. Uit die meting concluderen we dat er gemiddeld 100 deeltjes per uur uittreden. Omdat het aantal deeltjes dat in een uur uittreedt binomiaal verdeeld is de verwachting hiervan gelijk aan np, waarbij n het totale aantal deeltjes is en $p = 10^{-7}$, dus zien we dat $n = 10^9$.
Merk op dat het aantal deeltjes niet constant is, maar als we onze metingen verrichten gedurende een periode van enkele dagen dan kunnen we bij benadering aannemen dat dat wel zo is. Het aantal deeltjes dat in een uur uittreedt is binomiaal verdeeld met parameters 10^9 en 10^{-7} zodat we met de formule

$$p_k = \binom{10^9}{k} (10^{-7})^k \ (1 - 10^{-7})^{10^9 - k}, \ k = 0, 1, ..., 10^9,$$

nu de kans zouden kunnen bepalen dat het aantal uittredende deeltjes kleiner dan 90 is. Praktisch gezien is zo'n berekening echter onuitvoerbaar.

Op grond van bovenstaande voorbeelden ligt het voor de hand om na te gaan hoe de binomiale verdeling er uit gaat zien als we bij vaste $\mu = np$ de parameter n steeds groter laten worden en de parameter p dus steeds kleiner. We proberen daarom na te gaan hoe de uitdrukking:

$$\binom{n}{k} p^k \ (1-p)^{n-k},$$

er uit gaat zien als we k en $\mu = np$ vast houden en n willekeurig laten toenemen. Door $p = \mu/n$ in te vullen krijgen we

$$\binom{n}{k} (\mu/n)^k \ (1 - \mu/n)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\mu/n}{1 - \mu/n}\right)^k \ (1 - \mu/n)^n$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\mu}{n-\mu}\right)^k \ (1 - \mu/n)^n$$

$$= \frac{\mu^k}{k!}(1 - \mu/n)^n \left\{\frac{n}{n-\mu}.\frac{n-1}{n-\mu}...\frac{n-k+1}{n-\mu}\right\}.$$

Als we nu n laten toenemen gaat $(1 - \mu/n)^n$ naar $e^{-\mu}$ en elk van de k factoren in de uitdrukking tussen accoladen gaat naar 1. Het resultaat is

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p^k \ (1-p)^{n-k} = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

De diskrete kansverdeling

$$p_k = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \ k = 0, 1, ...,$$

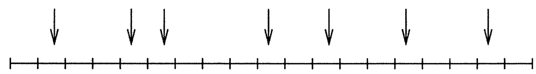
noemen we nu een **Poisson-verdeling** met parameter μ.
Voor een diskrete kansverdeling geldt dat de som gelijk moet zijn aan 1, ofwel

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

zodat voor elke $\mu > 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{\mu}.$$

hetgeen de Taylorreeksontwikkeling vam e^{μ} is.



FIGUUR 4. Aankomsten

4. HET POISSON-PROCES

Uit tellingen weten we dat bij een postkantoor gemiddeld 30 klanten per tijdseenheid (bijv. een uur) aankomen. Het verwachte aantal klanten dat in een interval van lengte t (tijdseenheden) aankomt is dus $30 \times t$. Als we dit interval nu opdelen in n even grote stukjes (deelintervallen) dan heeft elk deelinterval lengte t/n en het verwachte aantal klanten dat in het deelinterval aankomt is gelijk aan $\frac{30t}{n}$. Als we nu aannemen dat in elk van die deelintervallen niet meer dan 1 klant (dus 0 of 1 klant) aankomt dan is de kans op 1 klant gelijk aan $\frac{30t}{n}$ en de kans op 0 klanten gelijk aan $1 - \frac{30t}{n}$. Als we ook aannemen dat aankomsten in verschillende deelintervallen onafhankelijk van elkaar zijn dan heeft het totaal aantal aankomsten in het interval met lengte t een binomiale verdeling met parameters n en $\frac{30t}{n}$.

Als we n nu weer toe laten nemen zien we net als in de vorige paragraaf dat de verdeling van het aantal aankomsten in het interval met lengte t naar een Poisson-verdeling met verwachting $30 \times t$ gaat. Het hier beschreven aankomstproces noemen we een Poisson-proces.

In plaats van aankomsttijdstippen bij een postkantoor kunnen we ook aan andere voorbeelden denken zoals tijdstippen waarop vliegtuigen neerstorten of tijdstippen waarop radioactieve deeltjes uittreden.

Een Poisson-(aankomst)proces heeft nu een drietal belangrijke eigenschappen:

- De aantallen aankomsten in niet overlappende intervallen zijn onafhankelijk van elkaar.
- Het verwachte aantal aankomsten in een interval is evenredig met de lengte van dat interval.
- Het aantal aankomsten in een interval heeft een Poisson-verdeling.

Voor het verwachte aantal aankomsten in een interval met lengte t kunnen we dus schrijven λt. We noemen λ nu de **intensiteit** van het Poisson-proces. De kans op k aankomsten in een interval met lengte t is dan

$$\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \ k = 0, 1, \ldots .$$

5. DE EXPONENTIËLE VERDELING

Veel praktische problemen kunnen worden beschreven met behulp van de **exponentiële verdeling**.

We gaan terug naar het Poisson-aankomstproces uit de vorige paragraaf. Als de intensiteit gelijk is aan λ dan is het aantal aankomsten in een interval met lengte t, zeg $[0,t]$ verdeeld volgens een Poisson-verdeling met verwachting λt. De kans dat er in dat interval geen enkele klant aankomt is dus gelijk aan $e^{-\lambda t}$. Hoe lang duurt het (vanaf tijdstip 0) tot de eerste klant binnen komt? We noemen het aankomsttijdstip van de eerste klant T. $P(T > t)$ is dus de kans dat gedurende het interval $[0,t]$ geen enkele klant binnen is gekomen, maar die is gelijk aan $e^{-\lambda t}$, ofwel

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

en

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

dus de verdelingsfunctie van T is gelijk aan

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

en de kansdichtheid

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

We spreken nu van de **exponentiële verdelingsfunctie** en de **exponentiële** kansdichtheid met parameter λ. Karakteristiek voor deze verdeling is de zogenaamde geheugenloosheid. Wat dat betekent kunnen we het best uitleggen aan de hand van een voorbeeld.

De toevalsvariabele X beschrijft de levensduur van een apparaat dat niet onderhevig is aan slijtage. Dus na een tijd y is het apparaat, als het niet door een andere oorzaak defect is geraakt, nog als nieuw. De verdeling van X is dan "geheugenloos", d.w.z. de kans om, als het apparaat na een tijd y nog steeds werkt, nog een tijd x te overleven, is gelijk aan de kans dat een nieuw apparaat een tijd x overleeft, of in formulevorm

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x),$$

ofwel als $P(X > y) > 0$,

$$P(X > x + y) = P(X > x)P(X > y).$$

We zien onmiddellijk dat de exponentiële verdeling aan deze voorwaarde voldoet. We vragen ons af of er nog meer (continue) verdelingen bestaan die geheugenloos zijn, ofwel voldoen aan deze uitdrukking. Als we schrijven

$$f(x) = P(X > x)$$

dan staat hier dus voor $x \geq 0, y \geq 0$,

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Alleen een functie van de vorm

$$f(x) = e^{cx}$$

voldoet aan deze vergelijking. Bovendien moet f begrensd zijn door 1, en

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0,$$

zodat $c < 0$, ofwel

$$P(X > x) = e^{-\lambda x},$$

met $\lambda > 0$. Voor de verdelingsfunctie geldt

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x),$$

dus voor $x \geq 0$ vinden we

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

De conclusie is dus dat de exponentiële verdelingsfunctie de enige geheugenloze (continue) verdeling is.

We komen nog even terug op het voorbeeld van een stuk radioactief materiaal. Het is redelijk om aan te nemen dat het uittredingsproces geheugenloos is. Om dat de deeltjes onafhankelijk van elkaar uittreden betekent dit dat voor elk deeltje de tijd tot uittreden exponentieel verdeeld is. Als de halveringstijd gelijk is aan 800 jaar, d.w.z. ongeveer 7×10^6 uur dan betekent dit dat voor een willekeurig deeltje de kans om binnen 7×10^6 uur uit te treden gelijk is aan $1/2$. Als die tijd exponentieel verdeeld is moet dus gelden

$$1 - e^{-\lambda 7 \times 10^6} = 1/2,$$

ofwel

$$\lambda = \frac{ln(2)}{7 \times 10^6} \approx 10^{-7}.$$

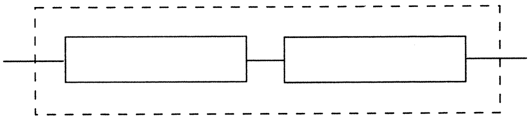
De kans dat een deeltje in een bepaalde periode van 1 uur uittreedt is $1 - e^{-\lambda.1}$ en is dus ongeveer gelijk aan $\lambda = 10^{-7}$.

VOORBEELD

Een PC bestaat uit twee onderdelen: de monitor en de computer zelf. De levensduur van de monitor beschrijven we met een toevalsvariabele X en de levensduur van de computer zelf met een toevalsvariabele Y. We nemen nu aan dat deze beide levensduren onderling onafhankelijk zijn en dat ze beide een exponentiële verdeling met verwachting 2 jaar resp. 4 jaar hebben. We zien dat de tijd totdat de PC defect raakt beschreven kan worden als

$$Z = \min\{X, Y\}$$

en we vragen ons nu af wat de verdeling van deze toevalsvariabele is. We zien onmiddellijk dat voor elke $z \geq 0$,



FIGUUR 5.

$$P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X > z, Y > z)$$

en omdat X en Y onderling onafhankelijk zijn

$$P(Z \leq z) = 1 - P(X > z)P(Y > z).$$

Nu geldt voor een toevalsvariabele V die exponentieel verdeeld is met parameter λ dat

$$P(V > z) = e^{-\lambda z}.$$

Uit het gegeven volgt dat X exponentieel verdeeld is met parameter $1/2 = 0,5$ en Y met parameter $1/4 = 0,25$, dus

$$P(X > z) = e^{-0,5z}$$

en

$$P(Y > z) = e^{-0,25}$$

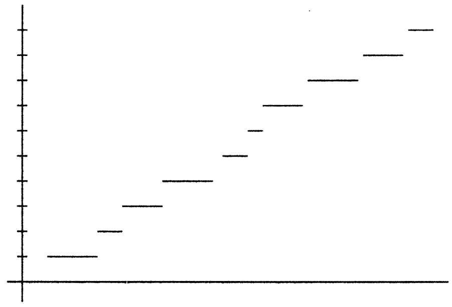
dus

$$P(Z \leq z) = 1 - e^{-0,75}.$$

In het algemeen zien we dat als de toevalsvariabelen X en Y onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld zijn met parameters λ en μ, dan is het minimum van deze toevalsvariabelen weer exponentieel verdeeld met als parameter $\lambda + \mu$. Door deze eigenschap herhaald toe te passen zien we het volgende.
Als de toevalsvariabelen $X_1, X_2, ..., X_n$ onderling onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met respectievelijke parameters $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ en

$$Z = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\},$$

dan is Z exponentieel verdeeld met parameter $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.



FIGUUR 6. Een Poisson-proces

6. TERUG NAAR HET POISSON-PROCES

Wij hebben zojuist gezien dat in een Poisson-aankomstproces met intensiteit λ de tijd tot de eerste aankomst exponentieel verdeeld is met parameter λ. Op dezelfde manier zien we dat de tijd tussen de eerste en de tweede aankomst ook weer exponentieel verdeeld is met parameter λ, enz. . Men kan bovendien laten zien dat die opeenvolgende tussentijden onderling onafhankelijk zijn. Op deze manier komen we dus tot een alternatieve definitie voor het Poisson-aankomstproces:

Als $T_1, T_2, \ldots$ de aankomsttijdstippen zijn van opeenvolgende klanten en de tussentijden $A_1 = T_1, A_2 = T_2 - T_1, \ldots$ zijn onderling onafhankelijk en alle exponentieel verdeeld met parameter λ, dan spreken we van een **Poisson-aankomstproces** met intensiteit λ.

We laten nu zien dat deze tweede definitie weer terug leidt naar de eerste. We doen dat aan de hand van een bekend voorbeeld.

VOORBEELD

In een postkantoor komen klanten één voor één binnen. We nemen aan dat de intervallen tussen opeenvolgende aankomsten exponentieel verdeeld zijn met parameter λ. We beschouwen nu een willekeurig tijdstip t en vragen naar de kans dat in een kort interval met lengte Δt de volgende klant binnen zal komen. Op grond van de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling weten we nu dat die kans slechts afhangt van de lengte van dat interval en gelijk is aan

$$1 - e^{-\lambda \Delta t}.$$

We weten dat voor Δt klein genoeg deze uitdrukking bij benadering gelijk is aan $\lambda \Delta t$. De kans dat er in een interval van lengte Δt twee of meer klanten aankomen, is kleiner dan de kans dat twee opeenvolgende aankomstintervallen

kleiner zijn dan Δt. Aangezien die aankomstintervallen onderling onafhankelijk zijn is die kans kleiner dan $(\lambda \Delta t)^2$ en voor kleine Δt te verwaarlozen ten opzichte van de kans op één aankomst.
We kijken nu naar dit proces gedurende een interval met lengte t. We kunnen dat interval nu opgedeeld denken in een groot aantal, zeg n, kleine intervallen met lengte Δt, dus dan is $n = t/\Delta t$. We kunnen nu weer verder redeneren zoals we eerder hebben gedaan bij de invoering van het Poisson-proces.
Als bij benadering in elk klein interval met kans $\lambda \Delta t$ een klant aankomt en met kans $1 - \lambda \Delta t$ geen klant, dan is het totaal aantal klanten dat in het interval met lengte t aankomt bij benadering binomiaal verdeeld met parameters n en $\lambda \Delta t$, waarbij $n \times \lambda \Delta t = \lambda t$. Als we n laten toenemen dan zal de verdeling van dat aantal klanten dus naar een Poisson-verdeling met parameter λt gaan, d.w.z. als X_t het aantal klanten is dat aankomt in het interval $[0, t]$, dan

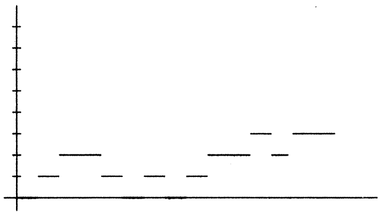
$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \ k = 0, 1, \ldots.$$

Het Poisson-proces is van grote praktische betekenis. Veel verschijnselen in de natuurkunde, de biologie en andere toepassingsgebieden kunnen goed beschreven worden als Poisson-processen. We noemen de volgende voorbeelden:

Het uittreden van deeltjes uit een stuk radioactief materiaal.
Het geboorteproces in een stabiele bacteriënkolonie.
Claims die binnen komen bij een verzekeringsmaatschappij.
Het proces van passerende auto's bij langs een vast punt op een (niet te drukke) verkeersweg.
Het proces van telefoonoproepen bij een telefooncentrale.

7. Een eenvoudige wachtrij

In een postkantoor komen klanten aan volgens een Poisson proces, d.w.z. de intervallen tussen opeenvolgende aankomsten zijn onderling onafhankelijk en zijn exponentieel verdeeld met parameter λ. De kans dat in een klein interval met lengte Δt een klant aankomt is bij benadering gelijk aan $\lambda \Delta t$ en de kans op meer dan één aankomst in zo'n interval is verwaarloosbaar klein.
In het postkantoor bevindt zich één loket. Als een klant binnen komt en het loket is vrij dan wordt hij onmiddellijk bediend. Zijn er al een of meer klanten aanwezig dan wacht hij in de rij op zijn beurt.
Bedieningstijden van opeenvolgende klanten zijn ook onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld, maar nu met parameter μ. Als de bediening van een klant beëindigd wordt vertrekt hij, dus net als bij de aankomsten zien we dat, zolang er klanten in het postkantoor zijn, er in een klein interval met lengte Δt een klant vertrekt met een kans die bij benadering gelijk is aan $\mu \Delta t$. Het hier beschreven model wordt in de notatie van Kendall aangeduid als $M|M|1$.



FIGUUR 7. Het aantal klanten in een wachtsysteem met één loket

We veronderstellen dat er sprake is van een stationaire situatie, d.w.z. de kans dat er n klanten aanwezig zijn hangt niet af van het tijdstip waarop we het postkantoor bekijken. We noemen die kansen $p_n, n = 0, 1...$; en we willen die kansen nu berekenen. We schrijven

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Omdat λ het verwachte aantal klanten is dat per tijdseenheid binnen komt en μ het verwachte aantal klanten dat per tijdseenheid bediend kan worden veronderstellen we dat $\lambda < \mu$, ofwel $\rho < 1$. Als aan deze eis niet voldaan is dan kan de lokettist het werk niet aan, zodat het aantal wachtende klanten steeds toe zal nemen. Er is dan dus geen sprake van een stationaire situatie.
Om de stationaire kansen $p_n, n = 0, 1...$; te bepalen redeneren we als volgt. Het aantal klanten in het postkantoor zal steeds met één toenemen (aankomst) of met één afnemen (vertrek). We zien gemakkelijk in dat in een stationaire situatie voor elke n even vaak een overgang van n naar $n+1$ zal plaats vinden als terug van $n+1$ naar n. De kans dat in een klein interval met lengte Δt een overgang van n naar $n+1$ plaats vindt is de kans dat er n klanten zijn en dat er in dat interval een aankomst plaats vindt. Die kans is dus bij benadering gelijk aan

$$p_n \lambda \Delta t.$$

Evenzo zien we dat de kans dat in een klein interval met lengte Δt een overgang van $n+1$ naar n plaats vindt bij benadering gelijk is aan

$$p_{n+1} \mu \Delta t.$$

Omdat deze twee kansen gelijk moeten zijn volgt voor $n = 0, 1, ...$;

$$\lambda p_n = \mu p_{n+1}.$$

We noemen dit de **lokale evenwichtsvergelijkingen**. De oplossing van deze vergelijkingen is

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \rho^n p_0,$$

voor $n = 0, 1, \ldots$. Maar de som van deze kansen moet gelijk zijn aan 1 dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = p_0 \frac{1}{1-\rho} = 1,$$

zodat

$$p_0 = 1 - \rho$$

en voor $n = 0, 1, \ldots$;

$$p_n = (1-\rho)\rho^n.$$

8. Bevolkingsprocessen

Het model in de vorige paragraaf is een voorbeeld van een geboorte- en sterfteproces. Men kan de aankomst van een klant dan opvatten als een geboorte en het vertrek van een klant als een sterfte. De tijd tussen twee overgangen (aankomsten of vertrekken) kan bij geboorte- en strefteprocessen afhangen van de toestand. Dat zien we in het volgende voorbeeld van een bevolkingsproces.

Voorbeeld

Beschouw een bevolking waarin geboorten plaats vinden volgens een Poisson proces, d.w.z. de tijden tussen opeenvolgende geboorten zijn exponentieel verdeeld met parameter λ. De kans dat in een klein interval met lengte Δt een geboorte plaats vindt is bij benadering gelijk aan $\lambda\Delta t$ en de kans op meer dan één geboorte in zo'n interval is verwaarloosbaar klein. Elk individu heeft een exponentiële levensduur met parameter μ, dus als er n individuen zijn is de tijd tot een sterfte het minimum van die n (onafhankelijke) levensduren en dus exponentieel verdeeld met parameter $n\mu$. De de kans op één sterfte in een klein interval met lengte Δt is dus gelijk aan $n\mu\Delta t$.

In het bovenstaande voorbeeld zien we dat de kans op een geboorte of een sterfte in een klein interval met lengte Δt kan afhangen van de toestand, ofwel het aantal individuen, op een gegeven tijdstip. In het algemeen zal de kans op een geboorte gelijk zijn aan $\lambda_n\Delta t$ en de kans op een sterfte $\mu_n\Delta t$. We noemen nu λ_n de geboorteïntensiteit in toestand n en μ_n de sterfteïntensiteit. In het bovenstaande voorbeeld geldt dus

$$\lambda_n = \lambda, \ n = 0, 1, \ldots;$$

en

$$\mu_n = n\mu, \ n = 1, 2, \ldots .$$

De lokale evenwichtsvergelijkingen luiden in het algemeen voor $n = 0, 1, \ldots$;

$$\lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1}.$$

VOORBEELD

We komen terug op het eerder genoemde voorbeeld. De lokale evenwichtsvergelijkingen luiden nu voor $n = 0, 1, ...;$

$$\lambda p_n = (n+1)\mu p_{n+1}.$$

De oplossing luidt

$$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0.$$

Maar de som van deze kansen moet gelijk zijn aan 1 dus gebruik makend van de Taylorreeksontwikkeling van e^x,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 e^{\frac{\lambda}{\mu}} = 1,$$

zodat

$$p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

en voor $n = 0, 1, ...;$

$$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}},$$

en we herkennen hierin een Poissonverdeling met parameter λ/μ.

9. MÉÉR WACHTRIJEN

We hebben zojuist gezien dat het eenvoudige wachtrijproces een geboorte- en sterfteproces is met constante geboorte- en sterfteïntensiteiten, d.w.z.

$$\lambda_n = \lambda, \ n = 0, 1, \ldots;$$

en

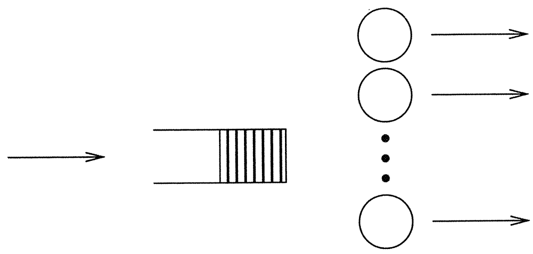
$$\mu_n = \mu, \ n = 1, 2, \ldots.$$

We beschouwen nu hetzelfde model, maar nemen nu aan dat er niet één maar méér, zeg s loketten zijn. Voor dit model gebruiken we de notatie $M|M|s$. De kans dat in een klein interval met lengte Δt een klant aankomt is weer bij benadering gelijk aan $\lambda\Delta t$ en de kans op meer dan één aankomst verwaarloosbaar klein.

De kans dat in zo'n interval een klant vertrekt hangt nu af van het aantal klanten dat in bediening is. Als er i klanten in bediening zijn is die kans bij benadering gelijk aan $i\mu\Delta t$. De lengte van de wachtrij in het model $M|M|s$ is dus een geboorte- en sterfteproces met geboorteïntensiteiten

$$\lambda_n = \lambda, \ n = 0, 1, \ldots;$$

en sterfteïntensiteiten



FIGUUR 8. Een wachtsysteem met méér loketten

$$\mu_n = n\mu, \ n = 1, 2, \ldots, s;$$

en

$$\mu_n = s\mu, \ n = s+1, s+2, \ldots.$$

We willen nu weer de stationaire kansen voor dit systeem bepalen. De verkeersintensiteit wordt in dit geval gedefinieerd als:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}.$$

Intuïtief zien we dat de voorwaarde voor stationair gedrag ook nu $\rho < 1$ is. Om de stationaire kansen $p_n, n = 0, 1, \ldots$; te bepalen maken we weer gebruik van de lokale evenwichtsvergelijkingen:

$$\lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1},$$

voor $n = 0, 1, \ldots$. Als we de bovengenoemde waarden voor de geboorte- en sterfteïntensiteiten invullen volgt voor $n = 0, 1, \ldots, s-1$.

$$\lambda p_n = (n+1)\mu p_{n+1},$$

en voor $n = s, s+1, \ldots$.

$$\lambda p_n = s\mu p_{n+1}.$$

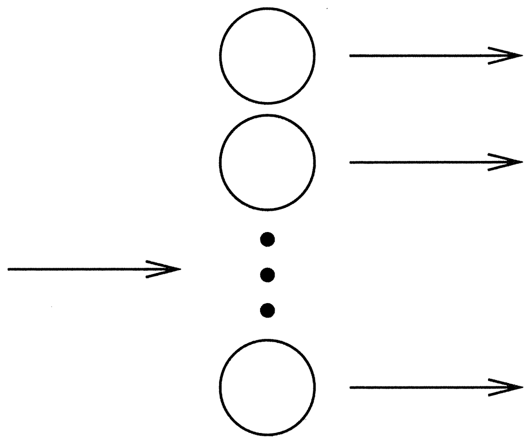
Met inductie laat men zien dat dit stelsel de volgende oplossing heeft:

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0, \ n = 0, 1, \ldots, s;$$

$$p_n = (\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} p_0, \ n = s+1, s+2, \ldots.$$

Omdat ook nog geldt dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1,$$



FIGUUR 9. Een verliessysteem

kunnen we p_0 bepalen en vinden we

$$p_0 = 1/[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} + \frac{1}{s!}\frac{1}{1-\lambda/s\mu}(\lambda/\mu)^s].$$

We zijn er tot nu toe van uit gegaan dat er sprake is van een onbegrensde wachtruimte. In de praktijk is er echter meestal sprake van een begrensde wachtruimte en vaak is er helemaal geen wachtruimte. In dat laaste geval spreken we niet meer van een wachtsysteem, maar van een **verliessyteem.**

Ook in een verliessyteem kunnen we het aantal klanten in systeem (dus het aantal bezette loketten) beschrijven als een geboorte- en sterfteproces. De geboorte- en sterfteïntensiteiten worden dan:

$$\lambda_n = \lambda, \; n = 0, 1, \ldots, s-1;$$

$$\lambda_n = 0, \; n = s, s+1, \ldots, s-1;$$

$$\mu_n = n\mu, \; n = 1, 2, \ldots, s;$$

$$\mu_n = s\mu, \; n = s+1, s+2, \ldots;$$

en de lokale evenwichtsvergelijkingen

$$\lambda p_n = (n+1)\mu p_{n+1},$$

voor $n = 0, 1, \ldots, s-1$. Deze vergelijkingen komen overeen met de eerste s vergelijkingen uit het vorige voorbeeld dus geldt weer

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0, \; n = 0, 1, \ldots, s.$$

De kansen $p_n, n = s+1, s+2, \ldots$. zijn nu echter alle gelijk aan nul,dus

$$\sum_{n=0}^{s} p_n = 1,$$

en

$$p_0 = 1/[\sum_{j=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}].$$

Ook hier definiëren we de verkeersintensiteit als

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu},$$

maar omdat er niet meer dan s klanten in het systeem kunnen zijn behoeft niet voldaan te worden aan de voorwaarde $\rho < 1$.

10. Wachttijden

In het voorafgaande hebben we gekeken naar de lengte van de wachtrij, ofwel het aantal klanten in een wachtsysteem. Een klant zal vaak meer geïnteresseerd zijn in de wachttijd, d.w.z. de tijd die hij doorbrengt in de wachtrij voordat hij aan de beurt is. In het model $M|M|1$ is de verdeling van de wachttijd af te leiden uit de verdeling van het aantal klanten in het systeem.
Als een aankomende klant bij zijn aankomst n klanten aantreft dan is zijn wachttijd gelijk aan de som van de bedieningstijden van die n klanten. Die bedieningstijden zijn allemaal exponentieel verdeeld met parameter λ. Dat geldt, dankzij de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling, ook voor de resterende bedieningsduur van de klant die op het tijdstip van aankomst in bediening is. De verdeling van de som van n onderling onafhankelijke toevalsvariabelen, die alle exponentieel verdeeld zijn met parameter λ, is een gamma-verdeling of Erlang verdeling met parameters n en λ. We kennen de kans p_n dat in de stationaire situatie er (op een willekeurig tijdstip) juist n klanten in het systeem zijn. Men kan nu laten zien dat de kans dat in de stationaire situatie een aankomende klant juist n klanten in het systeem aantreft hetzelfde is. Daarvoor doen we een beroep op de zogenaamde PASTA (Poisson arrivals see time averages) eigenschap. Door de bovengenoemde resultaten te combineren kunnen we nu de stationaire verdeling van de wachttijd in het systeem $M|M|1$ berekenen. Aldus vinden we voor de stationaire wachttijd W:

$$P(W \leq w) = 1 - \rho e^{-\mu w(1-\rho)}, \; w \geq 0.$$

Deze verdelingsfunctie is continu behalve in het punt 0. Door $w = 0$ te nemen volgt dat

$$P(W = 0) = 1 - \rho.$$

Deze laatste kans is juist gelijk aan p_0 en het is dus de kans dat een aankomende klant het systeem leeg aantreft en dus niet behoeft te wachten alvorens bediend te worden.

Een heel algemene relatie tussen de (stationaire) wachttijd en de lengte van de wachtrij is de formule van Little. Deze luidt:

$$L = \lambda W.$$

Hierin is L het verwachte aantal klanten in een wachtsysteem, λ de aankomstintensiteit (dus het verwachte aantal klanten dat per tijdseenheid aankomt) en W de verwachte verblijftijd van een klant in dat systeem.
In het voorbeeld van het systeem $M|M|1$ zien we het volgende:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \rho/(1-\rho).$$

De verblijftijd van een klant is de som van zijn wachttijd en van zijn bedieningsduur, dus

$$W = \int_0^{\infty} w\rho\mu(1-\rho)e^{-\mu w(1-\rho)}dw + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\rho}.$$

We zien dat voor dit eenvoudige voorbeeld de formule van Little inderdaad van toepassing is. Maar deze formule geldt veel algemener. Zo kunnen we hem ook toepassen op het systeem $M|M|s$. Voor de verwachte wachttijd (in de wachtrij) vinden we dan

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} np_n - \frac{1}{\mu}.$$

Referenties

[1] J.W. Cohen(1969)"The Single Server Queue", North-Holland, Amsterdam

[2] W. Feller(1939) "Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in Wahrscheinlichkeitstheoretischer Behandlung", Acta Bioth. Ser. A,**5**, 11-40

[3] F.P. Kelly(1979) "Reversibility and Stochastic Networks", Wiley, Chichester

[4] D.G. Kendall(1953) "Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain", Ann.Math.Stat.,**24**,338-354

[5] S.M. Ross(1997) "Introduction to Probability Models", Academic Press, San Diego

[6] S.M. Ross(1996) "Stochastic Processes", Wiley, New York

CWI Vakantiecursus 1997

pp. 83 – 102

Bonus-Malus in Kwaliteitscontrole

Het is niet alles goud wat er blinkt

C.A.J. Klaassen

Universiteit van Amsterdam, Vakgroep Wiskunde,
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam,

Samenvatting

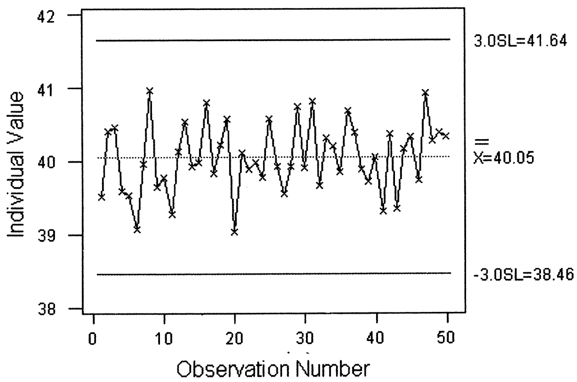
Bij alle producten die worden gemaakt en diensten die worden geleverd, is de kwaliteit ervan steeds van wezenlijk belang. Hoe ook de criteria er voor een bepaald product uitzien, steeds wordt de kwaliteit ervan beïnvloed door het ontwerp, het productieproces zelf en de eventuele eindcontrole. Bij elk van deze drie fasen speelt statistische variatie een essentiële rol en kan dus de statisticus voor flinke verbeteringen en vaak enorme kostenbesparingen zorgen. We zullen de eerste twee fasen kort bespreken. Op de eindcontrole die met steekproefkeuring wordt uitgevoerd, zullen we wat dieper ingaan en we zullen een nieuwe ontwikkeling hierin bestuderen. Om niet al te abstract te redeneren, kunnen we een concreet voorbeeld in gedachte nemen, bijv. de productie van "het gouden kalf", een auto.

1. Ontwerp

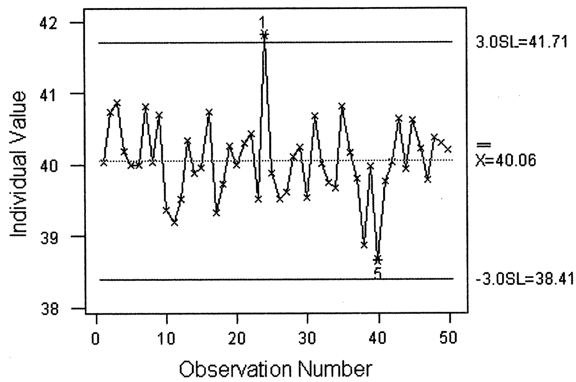
Duidelijk is dat er verscheidene kwaliteitscriteria kunnen worden aangelegd voor een auto, zijn onderdelen, de laklaag, etc. en dat er daarbij afwegingen van tegenstrijdige criteria plaats moeten vinden. Als echter deze afweging heeft plaats gevonden, is daarmee vastgelegd aan welke specifieke eisen de te produceren auto moet voldoen. Nu komt de ontwerpfase, waarin tot in alle details wordt bepaald hoe alle onderdelen er precies uit moeten zien en aan welke specificaties deze moeten voldoen. Ook worden in deze fase alle details van het fabricageproces vastgelegd. Als dan de nieuw ontworpen auto in productie gaat, zal er bij de productie van elk onderdeel variatie optreden, ook in de essentiële karakteristieken ervan. Deze variatie is stochastisch van aard, in de zin dat deze kan worden opgevat als het resultaat van een kansmechanisme. Hierbij spelen vele invloeden een rol die alle hun kleine bijdrage leveren aan het resultaat, een onderdeel dat al dan niet aan de specificaties voldoet. Deze stochastische variatie is nooit helemaal te voorkomen en dat hoeft ook niet. Maar je moet er wel op de juiste manier mee omgaan. Dat kan alleen als je de statistiek gebruikt, d.w.z. je (statistisch geschoolde) gezonde verstand. Natuurlijk kan een productieproces met de bijbehorende machines zo worden ingericht dat het te leveren product zeer nauwkeurig aan de doelspecificaties voldoet. Dat is meestal echter duur en niet nodig. Daar moet al in de ontwerpfase over worden nagedacht. Verder moeten de onderdelen en het geheel onder zeer verschillende omstandigheden goed werken. De motor moet starten bij $-30°C$ en bij $+40°C$. De lak moet bij regen, ijs en zon gedurende vele jaren bescherming bieden aan de carrosserie. Het streven bij een productontwerp is dan ook het product robuust, d.w.z. ongevoelig, te maken voor kleine afwijkingen in de specificaties van de onderdelen en voor de soms grote variaties in omstandigheden waaronder het moet functioneren. Dit heet robuust ontwerpen. Daarbij worden die factoren bepaald die de kwaliteit van het product en het functioneren ervan het sterkst beïnvloeden. Om dit te kunnen moet er geëxperimenteerd worden en bij dit alles speelt weer de statistiek een uitermate belangrijke rol. Hierbij wordt de statistische theorie van de proefopzetten toegepast.

2. Statistische Proces-Beheersing

Als dan het ontwerp van product en productieproces op deze manier is aangepakt kan de feitelijke productie worden gestart. Dan zal blijken dat dit productieproces beheerst moet worden. We kunnen niet alles laten lopen en er blindelings op vertrouwen dat het proces aflevert wat het moet afleveren. Er treedt immers stochastische variatie op. Dat is niet erg en in het ontwerp ingebouwd, maar door te meten aan de geproduceerde onderdelen kan worden geconstateerd of de optredende variatie normaal is, d.w.z. of het proces "onder controle" is, of dat de variatie uit de hand loopt en het proces "out of control" is. De statistische technieken en methoden die hierbij worden toegepast, worden samengevat onder de term statistische proces-beheersing. Het simpelste voorbeeld hiervan beschrijven we kort. Het heet de Shewhart controlekaart. Hierbij wordt een grafiek getekend met op de horizontale as een tijdschaal en op de verticale as de waarde van de te "beheersen" karakteristiek. Laten we het productieproces een tijdje waarnemen. Daarmee bedoelen we dat we bijvoorbeeld elk kwartier het product (auto-onderdeel) dat op dat moment wordt afgerond doormeten en de waarde van de relevante karakteristiek in onze grafiek uitzetten. Als het proces onder controle is zal de variatie in deze waarden niet al te groot zijn en krijgen we zoiets te zien als in Figuur 1. Als het productieproces na een bepaald moment echter niet meer op de "normale" manier verloopt zal het plaatje er anders uitzien, bijvoorbeeld als in Figuur 2. De stochastische variatie die we in Figuur 2 zien is waarschijnlijk niet meer de procesinherente variatie zoals in Figuur 1, maar er is iets aan het kansmechanisme veranderd dat de waarden voortbrengt. Het is daarom verstandig het productieproces stop te zetten en naar de oorzaken van deze storing te zoeken. In beide figuren zijn drie horizontale lijnen te zien, namelijk de centrale lijn en twee zogenaamde regelgrenzen. De centrale lijn is de middelste en deze geeft de gemiddelde waarde aan van de karakteristiek van die producten die door het proces worden afgeleverd als het onder controle is. De regelgrenzen bepalen wanneer moet worden geconcludeerd, dat het proces out of control is. Als een waarde niet tussen deze twee lijnen valt, is er waarschijnlijk sprake van een



FIGUUR 1. Proces onder controle.



FIGUUR 2. Proces out of control.

storing en is het proces niet meer beheerst. Het is duidelijk dat bij het bepalen van deze regelgrenzen een juiste balans gevonden dient te worden tussen twee fouten die gemaakt kunnen worden.

De eerste fout is het proces ten onrechte stoppen. Dit gebeurt als een waarde buiten de regelgrenzen valt, maar het proces toch onder controle is. De kans op zo'n waarde bij een proces dat onder controle is, kan klein worden gemaakt door de regelgrenzen ver uit elkaar en ver van de centrale lijn te kiezen.

De tweede fout is het proces ten onrechte door laten gaan, terwijl het out of control is en dus tamelijk veel producten genereert die niet aan de kwaliteitscriteria voldoen. De kans dat bij een proces dat out of control is, niet gestopt wordt, d.w.z. dat de gemeten waarde binnen de regelgrenzen valt, kan worden verkleind door de regelgrenzen dichter bij elkaar en de centrale lijn te kiezen.

Duidelijk is dat beide typen fouten ernstige financiële consequenties kunnen hebben. Bij de eerste fout staat het productieproces ten onrechte stil en bij de tweede fout worden waardeloze producten afgeleverd. Men kan proberen beide fouten volledig te vermijden door alle producten door te meten. Dat kan echter ook niet foutloos, het is bovendien meestal te kostbaar en tenslotte kan de meting destructief zijn. Daarom moet tussen de kansen op beide fouten een evenwicht worden gevonden. Dat kan met behulp van de theorie van de statistische proces-beheersing, die overigens nauw gerelateerd is aan de statistische theorie van het toetsen van hypothesen. De klassieke benadering gaat daarbij uit van normaal verdeelde stochastische variabelen. Modern statistisch onderzoek richt zich op het laten vallen van deze aanname van normaliteit, die immers in het merendeel van de practische gevallen onverantwoord is. Zonder deze normaliteitsveronderstelling zitten we op het terrein van de zogenaamde semiparametrische statistiek, waarbinnen ook in Nederland sterk wetenschappelijk onderzoek plaatsvindt.

3. Steekproefkeuring

Na en naast de statistische proces-beheersing kan ook steekproefkeuring worden toegepast op partijen van producten. Dit kan door de producent zelf worden gedaan, maar ook door een onafhankelijke instantie.

Wanneer je bijvoorbeeld een gouden ring bij de juwelier koopt, ga je er terecht vanuit dat het goudgehalte correct wordt opgegeven. Dit gehalte wordt gegarandeerd door de *Waarborg Platina, Goud en Zilver, N.V.* te Gouda. Dit onafhankelijk essaai-laboratorium keurt alle voorwerpen van edelmetaal die in Nederland op de markt worden gebracht, en voorziet deze van een waarmerk. De merktekens die hiervoor worden gebruikt, zijn in Figuur 3 aangegeven.

Controle op de kwaliteit van producten en diensten vindt in onze maatschappij buitengewoon veelvuldig plaats. Naast bij wet ingestelde keuringsdiensten als de Waarborg Platina, Goud en Zilver, N.V. en naast regelmatige eigen keuringen van bedrijven bij hun productieprocessen valt te denken aan bijvoorbeeld accountantscontroles. Meestal wordt daarbij van steekproefkeuring gebruik gemaakt.

Laten we veronderstellen dat een zekere *partij* van N gelijksoortige producten moet worden gekeurd en dat van elk product door middel van een test of proef is vast te stellen of het aan de specificaties voldoet of niet. Een product is dus goed of fout, ofwel deugdelijk of ondeugdelijk, of ook wel niet-defectief of defectief. Om de kosten te drukken worden uiteraard niet alle N producten aan de test onderworpen, maar worden er op een aselecte manier n producten uit de partij gekozen en daarna getest. Op basis van de resultaten bij deze n producten wordt dan de gehele partij goed- of afgekeurd.

Bij de keuze van de steekproefomvang n moeten twee tegengestelde belangen in evenwicht worden gebracht:

- Hoe groter n, hoe groter de consumentenbescherming oftewel hoe hoger de kwaliteit van de producten na inspectie.
- Hoe kleiner n, hoe lager de keuringskosten.

Bij destructieve metingen is de situatie gecompliceerder dan bij niet-destructieve. Daarom zullen we veronderstellen met niet-destructieve metingen te maken te hebben.

Uiteraard is de keuze van n weer een statistisch probleem. De klassieke statistische theorie draagt hiervoor oplossingen aan die gebaseerd zijn op de toetsingstheorie en die met name goed bruikbaar zijn bij massa-productie, dat wil zeggen bij grote waarden van N, de partij-omvang. In feite is een goed statistisch raamwerk voor steekproefkeuring geformuleerd door Dodge en Romig in 1929 en te beschouwen als een voorloper van de toetsingstheorie van Neyman en Pearson, waarvoor 1933 als geboortejaar kan gelden.

4. Klassieke Benadering

Zij p de fractie ondeugdelijken in een partij. Aselect worden er n objecten uit de partij van omvang N gekozen en de partij wordt goedgekeurd (geaccepteerd) als er c of minder ondeugdelijken in worden gevonden. Met dit *keuringsschema* is de *goedkeurkans* $P_g(p)$ bij *kwaliteit* p gelijk aan

$$(1) \qquad P_g(p) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{pN}{x}\binom{(1-p)N}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

en dit is, voor n klein t.o.v. pN en $(1-p)N$, bij benadering gelijk aan

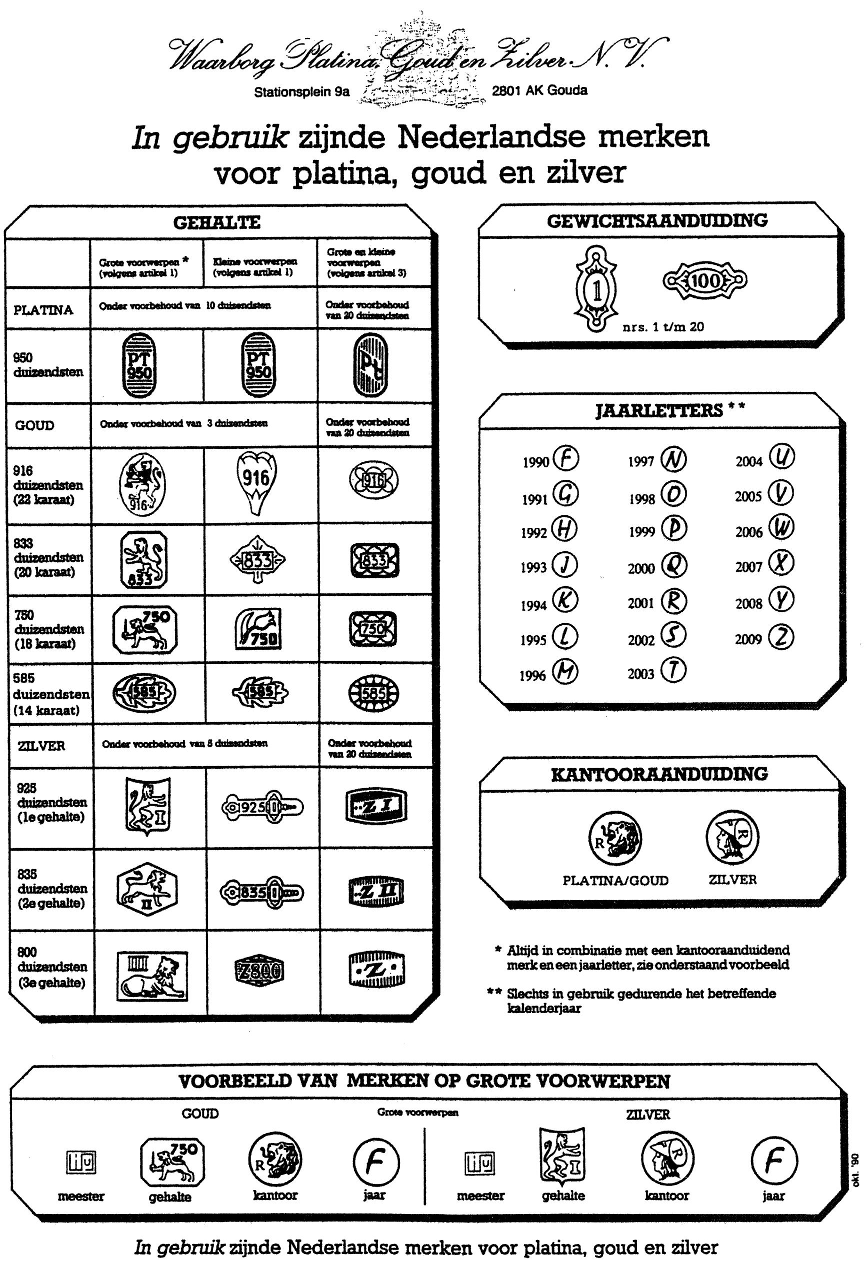
$$(2) \qquad P_g(p) \approx \sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

De grafiek van $P_g(p)$ noemen we de *keuringskarakteristiek* (Operating characteristic OC-curve). Idealiter zouden we alle partijen met $p < p_0$ willen accepteren en alle andere verwerpen. Deze keuringskarakteristiek kan niet bereikt worden zonder volledige en foutloze inspectie van de partij. Om economische redenen zwakken we daarom onze eisen opgelegd aan het keuringsschema als volgt af

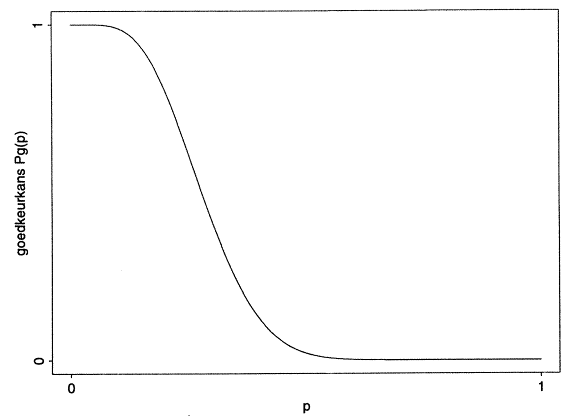
$$(3) \qquad P_g(p) \begin{cases} \geq 1-\alpha & \text{voor } p \leq p_0 \\ \leq \beta & \text{voor } p \geq p_1, \qquad 0 < p_0 < p_1 < 1. \end{cases}$$

Hierbij heet p_0 de grenskwaliteit voor de leverancier of producent en p_1 de grenskwaliteit voor de afnemer of consument. α and β worden meestal 0,1, 0,05 of 0,01 gekozen. Het is duidelijk dat de twee parameters n en c van ons keuringsschema vastgelegd worden door de twee eisen uit (3) en de extra eis dat n zo klein mogelijk dient te zijn.

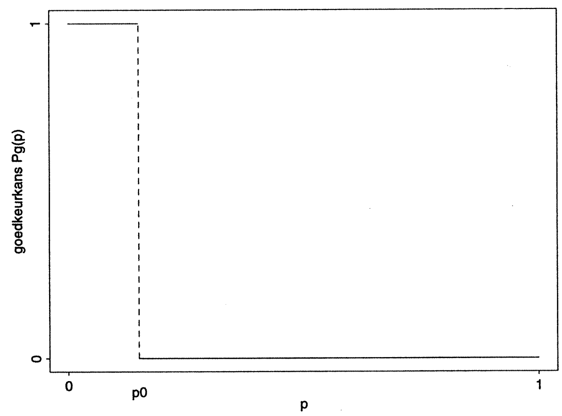
Het werkt verhelderend het probleem gesteld door (3) te formuleren in termen van de *toetsingstheorie* van Neyman en Pearson. Toets de nulhypothese



FIGUUR 3. Merktekens voor edelmetaal.



FIGUUR 4. Benadering (2) voor $P_g(p)$.

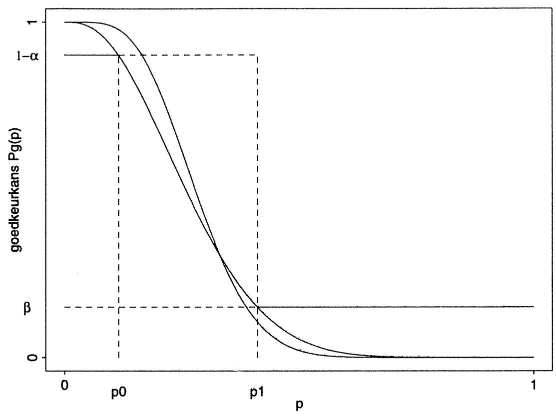


FIGUUR 5. $P_g(p) = \mathbf{1}_{[0,p_0)}(p)$.

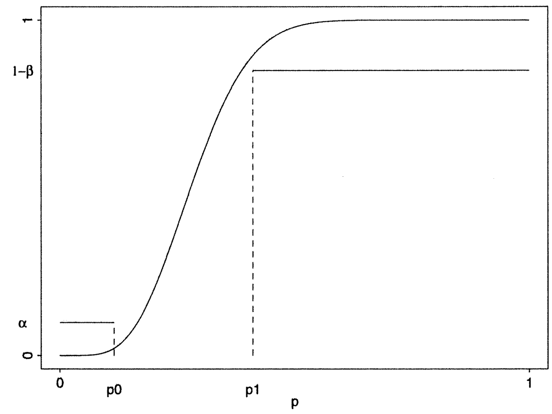
$H_0 : p \leq p_0$ tegen het alternatief $H_1 : p > p_0$ met onbetrouwbaarheidsdrempel α. Zij X het aantal ondeugdelijken bij steekproefomvang n uit de partij. Verwerp voor grote waarden van X, d.w.z. $X > c$, zódat

$$
\begin{aligned}
& P_p(X > c) \leq \alpha && \text{voor alle } p \leq p_0, \\
\text{ofwel } \; & P_p(X \leq c) \geq 1 - \alpha && \text{voor alle } p \leq p_0, \\
\text{ofwel } \; & P_g(p) \geq 1 - \alpha && \text{voor alle } p \leq p_0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Een tweede eis die we aan onze toets opleggen, is dat het onderscheidend ver-



FIGUUR 6. Eis (3) op keuringskarakteristiek.



FIGUUR 7. Onderscheidend vermogen.

mogen voor $p \geq p_1$ minstens $1 - \beta$ is, d.w.z.

$$
\begin{array}{llll}
 & & P_p(X > c) \geq 1 - \beta & \text{voor alle } p \geq p_1, \\
(5) & \text{ofwel} & P_p(X \leq c) \leq \beta & \text{voor alle } p \geq p_1, \\
 & \text{ofwel} & P_g(p) \leq \beta & \text{voor alle } p \geq p_1.
\end{array}
$$

Merk op dat er voor elke n een $c = c_n$ te vinden is, zó, dat aan (4) is voldaan en dat voor n dichtbij N ook aan (5) kan worden voldaan. Wanneer we n minimaal kiezen vinden we een uniek paar (n, c) als optimale parameters voor ons keuringsschema. We zien dus dat het construeren van een keuringsschema dat aan bepaalde eisen voldoet, equivalent is aan het vinden van een toets die aan zekere eisen voldoet. Hiermee is de theorie van de steekproefkeuring op attributen in principe teruggebracht tot de toetsingstheorie. Dit illustreert de nauwe relatie tussen steekproefkeuring en toetsingstheorie waaraan de namen Dodge en Romig, respectievelijk Neyman en Pearson verbonden zijn. Stel dat een reeks partijen ter keuring wordt aangeboden. We noemen de partijen die worden gekeurd tot en met de eerste partij die wordt afgekeurd (verworpen, niet geaccepteerd) een *run*. Het aantal partijen in een run noemen we de runlengte. Met de goedkeurkans $P_g(p)$ is deze stochast geometrisch ofwel Pascal verdeeld met parameter $1 - P_g(p)$, d.w.z. negatief binomiaal met parameters 1 en $1 - P_g(p)$. De verwachting van deze stochast heet de verwachte runlengte (ARL, Average Run Length) en heeft een intuïtief duidelijke betekenis. De ARL is gelijk aan $\frac{1}{1-P_g(p)}$. Er bestaat dus een equivalentie tussen ARL en de keuringskarakteristiek.

Zij nu Y de fractie ondeugdelijken in een aselect gekozen partij uit een productieproces. Hoewel Y discreet verdeeld is met waarden in $\{0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, is Y bij benadering continu verdeeld op $[0, 1]$. Zij bijvoorbeeld $f(\cdot)$ een continue functie zó, dat $f \geq 0$ is en

$$(6) \qquad P\left(Y = \frac{i}{N}\right) = \int_{\frac{i}{N+1}}^{\frac{i+1}{N+1}} f(x)dx, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Dan is f een dichtheid op $[0, 1]$ en als Z een stochast met dichtheid f is, dan geldt

$$(7) \qquad \begin{aligned} P\left(\tfrac{i}{N+1} < Z \leq \tfrac{i+1}{N+1}\right) &= P\left(\tfrac{i}{N+1} < Y \leq \tfrac{i+1}{N+1}\right) \\ &= P\left(Y = \tfrac{i}{N}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

De grafiek van zo'n dichtheid f ziet er vaak als volgt uit. Deze grafiek noemt men de *proceskromme*.

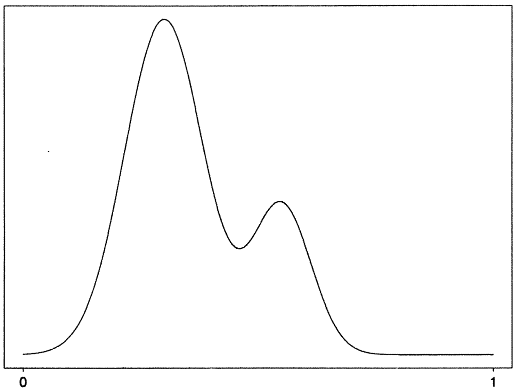
Zij $\tilde{Y}$ de fractie ondeugdelijken in een partij uit hetzelfde productieproces *na* steekproefkeuring, d.w.z. de fractie ondeugdelijken in een goedgekeurde partij, dan geldt

$$(8) \qquad P\left(\tilde{Y} = \frac{i}{N}\right) = \frac{P_g(\frac{i}{N})P(Y=\frac{i}{N})}{\sum_{j=0}^{N} P_g(\frac{j}{N})P(Y=\frac{j}{N})} .$$

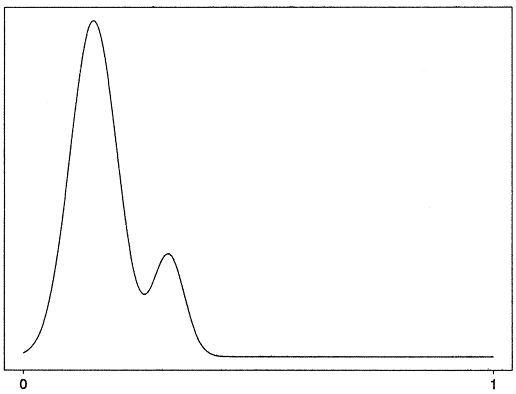
Bij benadering is ook $\tilde{Y}$ weer continu verdeeld en wel met dichtheid

$$(9) \qquad \tilde{f}(p) = \frac{P_g(p)f(p)}{\int_0^1 P_g(q)f(q)dq},$$

zoals intuïtief duidelijk is.



FIGUUR 8. Voorbeeld van een proceskromme.



FIGUUR 9. Voorbeeld van proceskromme na keuring.

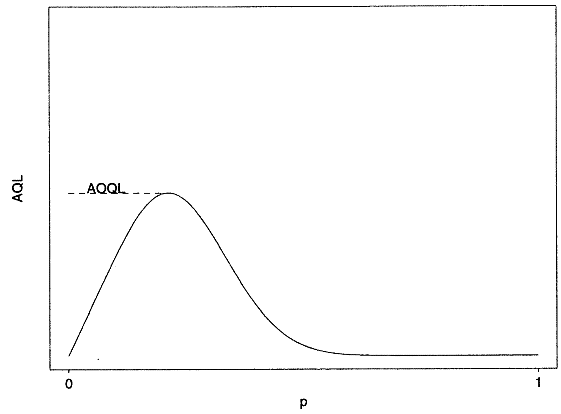
5. DODGE EN ROMIG (1929)

Neem aan dat alle afgekeurde partijen volledig worden geïnspecteerd en dat bij inspectie alle ondeugdelijke producten worden gerepareerd of door goede vervangen. Bij partijomvang N, steekproefomvang n, kwaliteit p en goedkeurkans $P_g(p)$ is nu de verwachte hoeveelheid inspectie:

$$I = n + (N - n)(1 - P_g(p)). \tag{10}$$

De *verwachte fractie doorgelaten uitval (AOQ; Average Outgoing Quality)* is dus

$$AOQ = \frac{(N - I)p}{N} = \frac{N - n}{N} p P_g(p) \tag{11}$$



FIGUUR 10. AOQ.

en de *maximale verwachte fractie doorgelaten uitval (AOQL; Average Outgoing Quality Limit)*

$$AOQL = \frac{N-n}{N} \sup_p \{pP_g(p)\}. \tag{12}$$

Dodge en Romig kiezen nu keuringsschema's door de AOQL te begrenzen en daarbij I te minimaliseren bij een door de producent gekozen waarde van p.

6. Beslissingstheoretisch Keuringsschema

Een voorbeeld van een beslissingstheoretisch keuringsschema is het volgende. Laat de kosten verbonden aan het aselect kiezen en daarna keuren van een element uit een partij de eenheid zijn waarin we de overige kosten uitdrukken. Laat a de kosten zijn die het laten passeren van een ondeugdelijk element met zich brengt en $-b$ de kosten (b de winst) van het laten passeren van een goed element. De kosten verbonden aan een partij van omvang N en kwaliteit p, die we laten passeren, zijn dan

$$pNa + (1-p)N(-b) = N(a+b)\left(p - \frac{b}{a+b}\right) = k(p - p_0) \tag{13}$$

met $k = N(a+b)$ en $p_0 = \frac{a}{a+b}$. In het Engels heet p_0 de break-even quality, waarbij het evenveel kost om een partij af te keuren als om haar goed te keuren. We willen, uiteraard, graag partijen accepteren met $p < p_0$ en verwerpen met $p > p_0$; d.w.z. partijen accepteren, waarvoor (13) negatief is, en partijen verwerpen waarvoor (13) positief is.

Zij nu Q de kwaliteit van de ter keuring binnenkomende partijen met

$$P(Q=p) = q(p), \; p = 0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1 \text{ (zie : proceskromme)}$$

en zij X het aantal ondeugdelijken in een steekproef van omvang n uit de partij. Gegeven $Q = p$ is de verdeling van X hyp(N, pN, n) en dus is

$$P(Q = p,\ X = x) = \frac{\binom{pN}{x}\binom{(1-p)N}{n-x}}{\binom{N}{n}} q(p)$$

en

$$P(Q = p \mid X = x) = \frac{\binom{pN}{x}\binom{(1-p)N}{n-x} q(p)}{\sum_{\tilde{p}} \binom{\tilde{p}N}{x}\binom{(1-\tilde{p})N}{n-x} q(\tilde{p})}. \tag{14}$$

Het verwachte verlies van acceptatie, gegeven $X = x$, is dus ((13))

$$\sum_p k(p - p_0) P(Q = p \mid X = x). \tag{15}$$

Als bij een steekproef van omvang n er x ondeugdelijken worden waargenomen, verwerpen we dan ook als (15) positief is. In het algemeen volgt hieruit dat we moeten verwerpen voor realisaties x van X, die groter zijn dan een zekere c.

Zij nu $P_{g,n}(p)$ de goedkeurkans van deze procedure, waarbij n nog vrij gekozen kan worden. Zij verder het verlies bij verwerpen en dus niet laten passeren van een partij, gelijk aan $v(p)$. Het verwachte verlies bij een aselect gekozen partij is dan

$$n + \sum_p \{k(p - p_0)P_{g,n}(p) + v(p)(1 - P_{g,n}(p))\} P(Q = p). \tag{16}$$

We kiezen daarom n zó, dat (16) minimaal is. Het zal duidelijk zijn dat het optimaliseren via (15) en (16) niet eenvoudig is. Bovendien zijn vaak de verdeling van Q (de proceskromme) en de kosten a en b (en dus ook k en p_0) niet nauwkeurig bekend. (a moet bijvoorbeeld ook de kosten van het verlies aan goodwill bevatten).

7. Consumentenbescherming versus Keuringskosten

De kern van de zaak bij steekproefkeuring is door Dodge en Romig (1944), pagina 7, als volgt geformuleerd:

> "*Given a product of a specified type of apparatus or material coming from a producer in discrete lots, what inspection plan will involve a minimum of inspection expense, and at the same time insure that under no conditions will more than a specified proportion of the unsatisfactory lots submitted for inspection be passed for delivery to consumers?*"

Wij herformuleren deze probleemstelling als volgt:

> "*Gegeven een specifiek product dat door een producent wordt aangeleverd in afzonderlijke partijen, welk keuringsschema brengt een minimum aan keuringskosten met zich mee en garandeert tegelijkertijd dat onder geen enkele voorwaarde meer dan een gespecificeerde fractie van alle aan klanten geleverde producten ondeugdelijk is?*"

We zullen nu eerst deze gespecificeerde fractie nauwkeuriger definiëren.

Beschouw een producent en de collectie van alle eenheden (producten van een bepaald type) die door deze producent zijn aangeboden aan de keuringsinstantie en die na keuring zijn geaccepteerd. De fractie ondeugdelijken binnen deze collectie heet de uitgaande kwaliteit en deze is gelijk aan de kans op een miskoop voor een consument die een artikel uit deze collectie koopt. Zelfs als de omvangen van de partijen die door de producent ter keuring worden aangeboden, niet-stochastisch zijn, is deze fractie zelf stochastisch vanwege de steekproefkeuring. Daarom zouden we de verwachte waarde van deze fractie willen bestuderen, en we zullen deze waarde de verwachte uitgaande kwaliteit noemen (EOQ; Expected Outgoing Quality). Om technische redenen is het echter eenvoudiger om de uitgaande kwaliteit in verwachting te beschouwen (OQE; Outgoing Quality in Expectation). Deze OQE definiëren we als het quotiënt van het verwachte aantal defectieven na keuring en het verwachte aantal geaccepteerde artikelen uit alle ter keuring aangeboden artikelen. In feite zullen we deze OQE bekijken na inspectie van iedere partij en met π_t geven we de OQE aan na inspectie van partij t, $t = 1, 2, 3, \ldots$.

Het is duidelijk dat de π_t's de kwaliteit weergeven van de productie- zowel als de keuringsprocessen. In feite is de consumentenbescherming beter naarmate de π_t's kleiner zijn. Daarom kiezen we een klein getal π_0, $0 \leq \pi_0 \leq 1$, en we implementeren de *consumentenbescherming* door de volgende eis op te leggen aan het keuringssysteem:

$$\pi_t \leq \pi_0, \quad t = 1, 2, 3, \ldots . \tag{17}$$

We zullen π_0 de bovengrens op de uitgaande kwaliteit in verwachting noemen (LOQE; Limit on the Outgoing Quality in Expectation). Verder merken we op dat deze LOQE π_0 onze versie is van de "gespecificeerde fractie" uit onze herformulering van de probleemstelling.

Zoals we al hebben besproken bestudeert men in de klassieke benadering van steekproefkeuring de keuringskarakteristiek van een steekproefschema, welke de goedkeurkans $P_g(p)$ ziet als een functie van de fractie $p = D/N$ van defectieven, waarbij D het aantal defectieven is in een partij van omvang N. De benadering uit de toetsingstheorie van formules (4) en (5) levert hier de consumenten- en producentenbescherming zoals gegeven in formule (3) en Figuur 6. In Tabel 1 wordt de OQE π_1 na inspectie van één partij van omvang N gegeven bij steekproefomvang n en acceptatie-getal c. Hierbij zijn de getallen n en c gekozen volgens (3) met de klassieke keuzen $\alpha = \beta = p_1 = 0,05$ en $p_0 = 0,01$. Verder is bij de berekening van π_1 de werkelijke kwaliteit p van de partij zó gekozen dat π_1 maximaal wordt. Tenslotte is de keuring zó dat afgekeurde partijen volledig worden geïnspecteerd en dat alle defectieven uit deze partijen worden verwijderd. Moderne productie-technieken mikken op fracties defectieven ver onder de 0,1 procent. Daarom is het niet onredelijk de keuzen in (3) te verscherpen tot $\alpha = p_0 = 0$. Dit leidt tot Tabel 2, die analoog is aan Tabel 1, maar met de keuzen $\alpha = p_0 = 0$, $\beta = p_1 = 0,05$. Onze conclusie is dat bij deze klassieke opzet de OQE π_1 waarden hoger dan $1,4\%$ kan bereiken. Bovendien zijn de steekproefomvangen n vrij hoog, i.h.b.

N	n	c	π_1
10	10	0	0
50	31	0	.0077
100	65	1	.0117
500	139	3	.0143
1000	146	3	.0134

TABEL 1. OQE voor $\alpha = \beta = p_1 = 0,05$ en $p_0 = 0,01$.

bij kleine partijomvangen zoals die gebruikelijk zijn bij o.a. het keuren van edelmetaal. Zoals we al gezien hebben, hebben Dodge en Romig in 1929 de

N	n	c	π_1
10	10	0	0
50	31	0	.0077
100	45	0	.00611
500	56	0	.0062
1000	57	0	.0063

TABEL 2. OQE voor $\alpha = p_0 = 0,\ \beta = p_1 = 0,05$.

verwachte fractie doorgelaten uitval, AOQ, geïntroduceerd. Later zullen we zien dat voor de situatie van één enkele partij geldt (zie (27))

$$\text{AOQ} \leq \text{EOQ} \leq \text{OQE} = \pi_1. \tag{18}$$

Dodge en Romig minimaliseren de verwachte hoeveelheid inspectie bij een vast gekozen waarde $\hat{p}$ van p zodanig dat de AOQ bij elke kwaliteit ten hoogste gelijk is aan een gekozen waarde voor de AOQL. Hier geven we een tabel voor OQE π_1 bij een AOQL gelijk aan $0,01$ en voor $\hat{p} \leq 0,002$. Uit bovenstaande tabellen kunnen we niets anders concluderen dan dat onder alle klassieke benaderingen bij gematigd grote partijen het inspectiepercentage vrij

N	n	c	π_1
10	10	0	0
50	22	0	.0127
100	27	0	.01181
500	35	0	.0102
1000	35	0	.0103

TABEL 3. Dodge en Romig. AOQL=0,01, $\hat{p} \leq 0.002$.

hoog ligt en dat het bij kleine partijen zelfs 100% is. Het Bonus-Malus-systeem dat we zullen invoeren heeft dit nadeel niet.

8. Schakelregels

Bij de practische implementatie van de keuringsschema's die de klassieke theorie heeft voortgebracht, worden vaak schakelregels geïntroduceerd. Zo is daar ISO 2859: *Sampling Procedures for Inspection by Attributes* (1989). De International Organization for Standardization ISO publiceert vele normen en standaarden op allerlei terreinen. Sinds enkele jaren bijvoorbeeld proberen de meeste bedrijven in Europa het ISO 9000-certificaat te verkrijgen. ISO 9000 beschrijft normen die moeten worden opgelegd aan kwaliteitssystemen bij het leveren van goederen en diensten. Een bedrijf dat deze norm handhaaft heeft een deugdelijk kwaliteitssysteem, wat echter niet noodzakelijkerwijs betekent dat het optimale kwaliteit levert. Daarvoor is een consequente toepassing van Statistische Proces-Beheersing onontbeerlijk. Keren we terug naar de standaard ISO 2859. Deze stelt voor om na het afkeuren van 2 van de laatste 5 partijen op strengere keuring over te gaan en n dus groter te kiezen, en na het goedkeuren van 10 partijen achtereen soepeler te werk te gaan en n kleiner te kiezen. Voor dit soort vuistregels is echter nauwelijks harde theoretisch statistische onderbouwing te vinden in de literatuur.

Toch is het principe gezond. Als immers een producent voortdurend goede kwaliteit levert is het niet nodig zijn producten even kritisch te bekijken als die van een producent die af en toe inferieure kwaliteit probeert te slijten. Een nuttig concept om dit principe handen en voeten te geven, is *krediet*. We zouden ons principe dan als volgt kunnen formuleren:

> "*Hoe hoger het krediet is dat een producent heeft verdiend, hoe kleiner dient de steekproefomvang te zijn.*"

Definitie. Krediet

Het krediet C van een producent is het aantal goedgekeurde artikelen na de laatste afgekeurde partij.

Bij afkeuring van een partij worden alle artikelen uit deze partij geïnspecteerd, alle defectieven verwijderd, alle niet-defectieven geaccepteerd en wordt het krediet C van de producent teruggezet op 0. Als de partij echter wordt goedgekeurd, wordt het krediet vermeerderd met de partij-omvang. Alle producenten starten met krediet 0. Uiteraard vooronderstelt volledige inspectie na afkeuring, dat de keuring niet-destructief is. De kern van ons Bonus-Malus-systeem is dat hoog krediet kleine steekproefomvangen geeft, wat een bonus voor de producent is en dat laag krediet resulteert in relatief grote steekproeven, een malus voor de producent.

9. Bonus-Malus in Kwaliteitscontrole

Met de bovengrens π_0 op de uitgaande kwaliteit in verwachting vast gekozen, ziet het Bonus-Malus-systeem er als volgt uit. Als een producent met krediet C een partij van omvang N ter keuring aanbiedt, dan wordt deze partij gekeurd door middel van een steekproef van omvang n, waarbij n het kleinste natuurlijk getal is dat niet kleiner is dan $N/\{(C+N-1)\pi_0+1\}$; in formule

$$n = \lceil \frac{N}{(C+N-1)\pi_0+1} \rceil. \tag{19}$$

Verder is het acceptatiegetal c gelijk aan 0; dat wil zeggen dat een partij alleen wordt goedgekeurd als er geen defectieven in de steekproef zitten:

$$c = 0. \tag{20}$$

Omdat de keuring niet-destructief wordt verondersteld te zijn, komen alle artikelen uit goedgekeurde partijen op de markt.

Hoe goed of slecht er ook geproduceerd wordt en hoe groot of klein de geleverde partijen ook zijn, dit keuringssysteem garandeert dat (17) steeds is vervuld. Om dit alles nauwkeurig te kunnen formuleren gaan we uit van een rij partijen die we nummeren volgens hun volgorde van keuring via de parameter t, $t = 1,2,\ldots$. De rij wordt dan $(N_1,D_1),(N_2,D_2),\ldots$, waarbij N_t de omvang van partij t is en D_t het aantal defectieven daarin, $t = 1,2,\ldots$. De indicator Δ_t geeft aan of de t-de partij wordt goedgekeurd ($\Delta_t = 1$) of afgekeurd ($\Delta_t = 0$). Omdat het toeval bepaalt welke artikelen uit de partij worden gekeurd, is Δ_t een stochastische grootheid. Met C_t^* geven we het krediet aan van de producent *na* inspectie van partij t. Met $C_0^* = 0$ geldt nu volgens onze definitie van krediet

$$C_t^* = (C_{t-1}^* + N_t)\Delta_t, \quad t = 1,2,\ldots. \tag{21}$$

Tenslotte geven we met N_t^* het stochastische aantal artikelen in de markt aan *na* inspectie van partij t en met D_t^* het stochastische aantal defectieven hieronder.

Stelling. Bonus-Malus werkt

Kies de bovengrens $\pi_0 \in [0,1]$. Als bij krediet C en partij-omvang N de steekproefomvang n wordt gekozen als in (19) en als het acceptatiegetal c gelijk aan 0 is als in (20), dan geldt

$$\pi_t = ED_t^*/EN_t^* \leq \pi_0, \quad t = 1,2,\ldots. \tag{22}$$

Hierbij mogen N_t en D_t zelfs afhangen van de resultaten van de inspecties van de partijen $1,2,\ldots,t-1$.

Vergeleken met andere steekproefsystemen is een van de voordelen van het Bonus-Malus-systeem dat er geen tabellen nodig zijn om de steekproefomvang te bepalen. Verder garandeert het systeem de ongelijkheden (22) ongeacht hoe veel of hoe weinig partijen er zijn geproduceerd en ongeacht de partij-omvangen. De steekproefomvang n uit (19) beschermt echter tegen malafide producenten, die het aantal defectieven in de markt proberen te maximaliseren. De bonafide producenten zullen eenvoudig proberen zo goed mogelijke partijen ter keuring aan te bieden. Daarom zal in de praktijk π_t veel kleiner zijn dan π_0.

Het is essentieel dat afgekeurde partijen volledig worden getest en dat de goedgekeurde artikelen eruit op de markt komen. Op die manier neemt de fractie defectieven in de markt af. Als afgekeurde partijen teruggestuurd zouden worden naar de producent, dan zou in principe dezelfde partij weer ter keuring kunnen worden aangeboden en dan zou uiteindelijk deze slechte partij in haar geheel op de markt komen.

Vanwege $(C+N-1)\pi_0+1 \geq N\pi_0+1-\pi_0 \geq N\pi_0$ en $(C+N-1)\pi_0+1 \geq 1$, is het rechterlid van (19) ten hoogste $\min\{N, \lceil 1/\pi_0 \rceil\}$. De steekproefomvang n wordt dus begrensd door een constante onafhankelijk van de partij-omvang.

We hebben nu de volgende fraaie ongelijkheid nodig.

ONGELIJKHEID VAN JENSEN

Laat $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een convexe functie zijn. Als X een stochastische grootheid is met eindige verwachting EX, dan geldt

$$E\psi(X) \geq \psi(EX). \tag{23}$$

In de notatie van (22) kan de verwachte uitgaande kwaliteit EOQ op tijdstip t geschreven worden als

$$\tilde{\pi}_t = E(D_t^*/N_t^*), \quad t = 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Met behulp van de ongelijkheid van Jensen zien we dat

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1 &= E\left(\tfrac{D_1^*}{N_1^*}\right) = E\left(1 - \tfrac{N_1-D_1}{N_1-D_1+D_1\Delta_1}\right) \\ &\leq 1 - \tfrac{N_1-D_1}{N_1-D_1+D_1E\Delta_1} = \tfrac{D_1E\Delta_1}{N_1-D_1+D_1E\Delta_1} \\ &= ED_1^*/EN_1^* = \pi_1. \end{aligned}$$

Dus voor $t = 1$ hebben we bewezen

$$\tilde{\pi}_t \leq \pi_t. \tag{25}$$

De gemiddelde uitgaande kwaliteit AOQ voldoet volgens (10) en (11) aan

$$\begin{aligned} \text{AOQ} &= \tfrac{D_1(N_1-n_1)}{N_1^2} E\Delta_1 \\ &\leq \tfrac{N_1-n_1}{N_1} E\left(\tfrac{D_1\Delta_1}{N_1-D_1+D_1\Delta_1}\right) \\ &= \tfrac{N_1-n_1}{N_1}\tilde{\pi}_1. \end{aligned} \tag{26}$$

Samenvattend concluderen we dat voor een geïsoleerde partij

$$\text{AOQ} \leq \text{EOQ} \leq \text{OQE}. \tag{27}$$

Om de inhoud en complicaties van de Stelling te illustreren zullen we het zeer speciale geval bestuderen van een geïsoleerde partij van omvang N die ter keuring wordt aangeboden. Het krediet C staat dus nog op niveau 0. In wezen is dit de situatie zoals beschouwd door Dodge en Romig (1929). De Stelling beweert dat bij steekproefomvang

$$n = \left\lceil \frac{N}{(N-1)\pi_0 + 1} \right\rceil \tag{28}$$

de uitgaande kwaliteit in verwachting π_1 ten hoogste gelijk is aan π_0. In formule kunnen we dit preciezer formuleren en wel als volgt, waarbij we schrijven $N_1 = N$, $D_1 = D$, $\Delta_1 = \Delta$. Eerst merken we op dat de goedkeurkans gelijk is aan

$$E\Delta = (N-D)\cdots(N-D-n+1)\{N\cdots(N-n+1)\}^{-1}. \tag{29}$$

Verder impliceert onze Stelling

$$\pi_1 = \frac{DE\Delta}{N-D+DE\Delta} = \left(1 + \frac{N-D}{DE\Delta}\right)^{-1} \le \pi_0, \tag{30}$$

voor $D = 0, 1, \ldots, N$. We zullen deze ongelijkheid rechtstreeks bewijzen via een ruwe versie van een van de basisideeën van het bewijs van de Stelling zelf. Daarvoor merken we om te beginnen op dat (30) equivalent is aan

$$\begin{aligned} \chi(D) &= \tfrac{1-\pi_0}{\pi_0} D \le \tfrac{N\cdots(N-n+1)}{(N-D-1)\cdots(N-D-n+1)} \\ &= \psi(D), \ D = 0, 1, \ldots, N-n, \end{aligned} \tag{31}$$

en dat trivialiter

$$\chi(0) = 0 \le N = \psi(0). \tag{32}$$

Onze ongelijkheid (30) is dus bewezen als

$$\chi(D+1) - \chi(D) \le \psi(D+1) - \psi(D), \ D = 0, 1, \ldots, N-n-1. \tag{33}$$

Nu is deze ongelijkheid equivalent aan

$$\frac{1-\pi_0}{\pi_0} \le \frac{(n-1)N\cdots(N-n+1)}{(N-D-1)\cdots(N-D-n)}, \ D = 0, 1, \ldots, N-n-1.$$

Omdat het rechterlid stijgend is in D, zijn al deze ongelijkheden tezamen equivalent aan de ene ongelijkheid met $D = 0$, dus aan

$$\frac{1-\pi_0}{\pi_0} \le \frac{(n-1)N}{N-n},$$

dat wil zeggen aan

$$n \ge \frac{N}{(N-1)\pi_0 + 1}, \tag{34}$$

welke volgt uit de keuze (28).

N	n(C=0)	c	π_1	$n(C=2N)$
10	9	0	.0110	8
50	29	0	.0085	16
100	41	0	.0070	19
500	60	0	.0058	22
1000	64	0	.0056	23

TABEL 4. Bonus-Malus bij krediet 0 en $2N$ voor $\pi_0 = 0,0147$.

N	n(C=0)	c	π_1	$n(C=2N)$
10	10	0	0	8
50	32	0	.0073	19
100	47	0	.0056	23
500	73	0	.0047	27
1000	79	0	.0045	28

TABEL 5. Bonus-Malus bij krediet 0 en $2N$ voor $\pi_0 = 0,0118$.

10. NUMERIEKE VERGELIJKINGEN

Onder het hoofdje "Consumentenbescherming versus Keuringskosten" hebben we drie tabelletjes laten zien met numerieke resultaten over twee klassieke steekproefsystemen. Het eerste systeem is gebaseerd op de theorie van het toetsen van hypothesen en beoordeelt iedere partij op haar eigen merites. Wanneer we Tabel 1 uitbreiden kunnen we concluderen dat de maximale waarde van de uitgaande kwaliteit in verwachting π_1 gelijk is aan $0,0147$ voor het geval $\alpha = \beta = p_1 = 0,05$, $p_0 = 0,01$. Vergelijking van dit steekproefschema met het Bonus-Malus-systeem voor $C = 0$ en $\pi_0 = 0,0147$ levert Tabel 4; in deze tabel zijn ook de Bonus-Malus-steekproefomvangen gegeven voor het geval er al enkele partijen goedgekeurd zijn en het krediet C gelijk is aan $2N$. De tabel toont aan dat het Bonus-Malus-systeem, zelfs bij krediet $C = 0$, kleinere steekproeven voorschrijft dan de klassieke toetsingsprocedure, die de extra waarnemingen gebruikt om de fractie defectieven in de partij nauwkeuriger te schatten. Uitbreiden van Tabel 2 levert een maximale waarde voor π_1 van $0,0118$ voor het geval $\alpha = p_0 = 0$, $\beta = p_1 = 0,05$ en deze wordt bereikt bij $N = 21$. Tabel 5 is het analogon van Tabel 4, maar nu voor $\pi_0 = 0,0118$. Voor deze situatie geeft het Bonus-Malus-systeem hogere steekproefomvangen bij krediet $C = 0$ dan de klassieke benadering. Maar, zelfs als er slechts twee partijen van dezelfde omvang N al zijn goedgekeurd, zijn de steekproeven onder het Bonus-Malus-systeem reeds aanzienlijk kleiner dan onder het klassieke systeem en is 100% inspectie niet meer nodig. Onze laatste tabel, Tabel 6, geeft de Bonus-Malus-steekproefgroottes n uit (19) voor $\pi_0 = 0,01$ voor partij-omvang N en voor verscheidene waarden van het krediet, namelijk voor

	C				
N	0	N	$2N$	$3N$	2000
10	10	9	8	8	1
50	34	26	21	17	3
100	51	34	26	21	5
500	84	46	32	24	20
1000	91	48	33	25	33

TABEL 6. Bonus-Malus bij verscheidene kredietwaarden voor $\pi_0 = 0,01$.

$C = 0$, $C = N$, $C = 2N$, $C = 3N$ en $C = 2000$. Uit een vergelijking van de Tabellen 3 en 6 kunnen we concluderen dat het Dodge en Romig systeem bij AOQL $\cong 0,01$ kleinere steekproeven voorschrijft dan ons Bonus-Malus-systeem bij $\pi_0 = 0,01$ en krediet $C = 0$. Echter, na twee goedgekeurde partijen van dezelfde omvang zijn de steekproeven al van dezelfde orde van grootte.

Bovenstaande vergelijkingen tonen aan dat het Bonus-Malus-systeem aanzienlijk kleinere steekproeven voorschrijft dan de klassieke keuringssystemen, mits de producent goede kwaliteit levert. Verder biedt het Bonus-Malus-systeem op een directere manier consumentenbescherming dan andere systemen zoals onze Stelling aantoont. Deze Stelling stelt dat het Bonus-Malus-systeem met steekproefgrootte n uit (19) de consument beschermt als in (22). De Stelling toont echter op geen enkele manier optimaliteit van (19) aan. Het vermoeden bestaat niettemin dat (19) dicht bij optimaliteit zit. Dit verdient nader onderzoek, maar hier illustreren we het aan een voorbeeld.

11. Voorbeeld

We stellen π_0 vast op $1/100$. Een niet nader genoemde, malafide producent past de volgende strategie toe. Bij krediet $C = 0$ levert hij een partij van omvang $N_1 = 99$ met $D_1 = 1$ defectief. Volgens (19) is de steekproefomvang $n_1 = 50$ en de goedkeurkans volgens (21) $p_1 = 49/99$. Bij krediet $C = 99$ en meer biedt onze producent partijen aan van omvang $N_2 = 2$ met $D_2 = 1$ defectief. Dan is de steekproefgrootte $n_2 = 1$ en de goedkeurkans $p_2 = 1/2$. Volgens de theorie van Markov-ketens zal op den duur de uitgaande kwaliteit in verwachting OQE gelijk zijn aan

$$\frac{D_1 p_1 + D_2 p_1 p_2/(1-p_2)}{N_1 - D_1 + D_1 p_1 + (N_2 - D_2 + D_2 p_2) p_1/(1-p_2)} = \frac{1}{101} = 0,0099. \tag{35}$$

Hoewel optimaliteit dus niet is gegarandeerd, toont dit voorbeeld aan dat we er dicht tegenaan zitten. In ieder geval waarborgt het Bonus-Malus-systeem bij de juiste keuze van de grens π_0 dat de kans groot is, dat "het goud is wat er blinkt."

CWI Vakantiecursus 1997

pp. 103 – 114

Problemen van Pascal tot Poisson

Jan van Maanen
Rijksuniversiteit Groningen
Pythagoras Consult
Nieuwe Boteringestraat 86-I, 9712 PR Groningen
e-mail: pyco@euronet.nl

1. Een steekproef

Wat u hierna aantreft is een steekproef uit twee eeuwen kansrekeningproblemen. De problemen zijn afkomstig uit de beginperiode van de kansrekening, die afgesloten wordt met de publikatie van het eerste leerboek (de *Ars Conjectandi* uit 1713 van Jakob Bernoulli). In de tweede periode waaiert de thematiek uit. Daar moet een globaal overzicht volstaan.

Hoe en waarom zijn de problemen ontstaan? Hierin onderscheidt de kansrekening zich niet van andere takken van wiskunde. Wiskundigen halen hun problemen uit de praktijk of ze creëren ze zelf. Het tweede type dient om er de eigen geest of de geest van anderen mee te scherpen. 'De geest van anderen scherpen,' valt uiteen in onderwijs geven (dan zijn de problemen 'opgaven' of 'sommetjes'), nieuwe wiskunde ontwikkelen (door een collega een researchprobleem voor te leggen), en uitdagen ('probeer daar maar eens uit te komen', een soort steekproef van de ene wiskundige in de richting van de andere).

In de ontwikkeling van de kansrekening komen problemen in al deze schakeringen voor. Sterker nog, problemen zijn de rode draad in de kansrekening geweest. Steeds neemt de nieuwe generatie de uitdagingen van de vorige op, en steeds laat ze zelf problemen na aan de volgende generatie. De problemen worden hier in een vertaling van hun oorspronkelijke formulering gepresenteerd, waarna enige informatie volgt over de destijds gegeven oplossing.

Voor de verbindende teksten tekent nu en dan Laplace. Laplace, die de nog steeds gehanteerde definitie van kans (aantal gunstige uitkomsten gedeeld door het totaal aantal uitkomsten van een experiment, als alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn) ingevoerd heeft, schreef een korte geschiedenis van de kansrekening als onderdeel van zijn *Essai Philosophique sur les Probabilités* [6]. Een aantal passages daaruit treft u hier aan.

Maar het gaat hier om de problemen. Ze zijn bestemd om de geest scherpen, als een steekproef voor de lezer.

FIGUUR 1. Blaise Pascal (1623–1662)

2. Pascal en Fermat

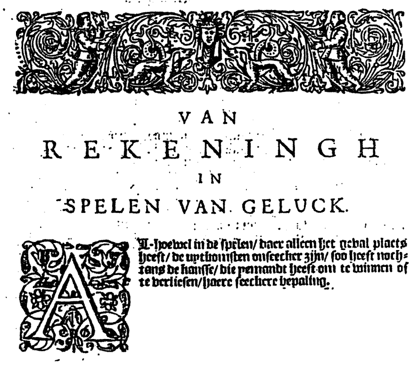
Hoewel gokken van alle tijden is, en er in de vijftiende en zestiende eeuw al over gerekend en geschreven werd, begint een systematische theoretische benadering van kansen in het midden van de zeventiende eeuw, en wel met een serie brieven die Pascal en Fermat in 1654 wisselden. Laplace merkt hierover op [6, II, p. 95]:

> Niemand had voor Pascal en Fermat principes en methoden gegeven om zulke zaken te berekenen, en had iets ingewikkelder problemen van dit soort opgelost. Het zijn dus deze twee grote wiskundigen aan wie we de eerste beginselen van de wetenschap der kansen moeten toeschrijven. De ontdekking hiervan kan gerangschikt worden onder de meest opmerkelijke zaken die de 17^e eeuw gesierd hebben, de eeuw die van alle eeuwen het eervolst was voor de menselijke geest.

Pascal (1623–1662) legde aan Fermat in een brief een aantal problemen voor. De brief was het begin van een correspondentie, die hier geciteerd wordt uit [7, pp. 372–431], maar ook in vertaling in allerlei bloemlezingen opgenomen is, onder meer in [8, pp. 25–40]. Pascal was onder andere geïnteresseerd in de vraag hoe spelers de totale inzet van een spel moeten verdelen als het spel tussentijds afgebroken wordt, het zogeheten *problème des parties* of ook wel *problème des points*. Denk hierbij aan twee gelijkwaardige tennisspelers, die een partij om drie gewonnen sets afbreken bij de setstand 2–0. De speler die achterstaat zou de partij nog steeds kunnen winnen, dus heeft recht op een deel van de inzet. Maar op hoeveel?

Fermat (1601–1665) heeft de vraag blijkbaar beantwoord (de brief is niet bewaard gebleven), want Pascal schrijft op 29 juli 1654:

> Uw methode is zeer zeker, en het is dezelfde die mij bij dit onderzoek als eerste inviel; omdat het rekenen met combinaties bezwaarlijk is, heb ik



VAN
REKENINGH
IN
SPELEN VAN GELUCK.

AL-hoewel in de spelen/ daer alleen het geval plaets heeft/ de uytkomsten onseecker zijn/ soo heeft nochtans de kansse/ die yemandt heeft om te winnen of te verliesen/ haere seeckere bepaling.

FIGUUR 2. Eerste bladzij van de *Rekeningh*

> daarvoor een vereenvoudiging, eigenlijk een andere, veel kortere en duidelijker methode gevonden, die ik hier in enkele woorden zal weergeven. Want ik zou van nu af aan, indien mogelijk, graag mijn hart voor u openleggen, zo blij ben ik over onze overeenstemming. Ik zie wel in: de waarheid in Toulouse en Parijs is een en dezelfde.

Voordat Pascal zijn methode uiteenzet herhaalt hij het probleem:

PROBLEEM 1 *Hoe bepaal ik de waarde van elke spelsituatie, als twee spelers bijvoorbeeld om* drie *gewonnen spelen spelen en elk van hen 32 Pistolen ingezet heeft:*

Nemen we aan dat de eerste twee *en de andere* één *partij gewonnen heeft* ...

Hij gaat dan als volgt te werk:

> Beseft U zich, Mijnheer, dat aan de eerste speler 64 toekomen, als hij wint; als hij verliest komen hem 32 toe. [Dan staat het namelijk 1-1, JvM] Als ze zich dus niet willen wagen en zonder spelen uit elkaar willen gaan, moet de eerste zeggen: "32 Pistolen heb ik in elk geval, want die krijg ik zelfs als ik verlies; maar wat de 32 andere betreft, misschien zal ik ze krijgen, misschien zult u ze krijgen, we hebben hetzelfde lot. Laten we dus deze 32 Pistolen in gelijke delen verdelen en geeft u me bovendien mijn 32 waar ik al zeker van was." Hij zal dus 48 Pistolen ontvangen en de andere 16.

Vervolgens behandelt Pascal het geval

PROBLEEM 2 *Nemen we nu aan dat de eerste* twee *partijen gewonnen heeft en de andere* geen enkele *en dat ze aan een nieuwe partij beginnen.*

Hij herleidt het geval tot het vorige en gebruikt dus in een zeer elementaire situatie recursie:

FIGUUR 3. Christiaan Huygens (1629–1695)

> De uitgangspositie van deze partij is zo dat, als de eerste wint, hij al het geld, 64 pistolen beurt; als de ander de partij wint, zie, dan zijn ze in het vorige geval teruggekomen, waarin de eerste *twee* winstpartijen zal hebben en de andere een.
> Welnu, we hebben reeds aangetoon dat in dit geval aan degene die de twee partijen binnen heeft, 48 pistolen toekomen: dus als ze deze partij niet willen spelen, moet hij het volgende zeggen: "Als ik deze parij win, zal ik het totaal van 64 winnen; als ik haar verlies, dan komt me rechtmatig 48 toe. Dus geeft u mij de 48 waarop ik in elk geval recht heb, zelfs als ik verlies, en laten we de overige 16 in tweeën delen, want uw kans om nu te winnen is even groot als de mijne." Zo zal hij 48 en 8, tezamen 56 pistolen hebben.

PROBLEEM 3 *Nemen we tenslotte aan dat de eerste slechts* een *partij gewonnen heeft en de andere* geen.

Stel, u bent de eerste speler. Hoe overtuigt u uw medespeler dat u met 44 pistolen het strijdperk mag verlaten?

3. HUYGENS

In 1656 hoorde Christiaan Huygens in Parijs over de problemen waaraan Pascal en Fermat gewerkt hadden. Hij ging er zelf mee aan de slag, en stuurde op 27 april 1657 een kort artikel over het onderwerp aan zijn leermeester Frans van Schooten. Het verhaal is bekend: Van Schooten publiceerde Huygens' tekst in 1657 in het Latijn (*De ratiociniis in ludo aleae*) en in 1660 in het Nederlands (*Van rekeningh in spelen van geluck*), als toegift bij zijn eigen verzamelwerk met *Mathematische Oeffeningen.* De begeleidende brief van Huygens is door Van Schooten als inleiding bij de *Rekeningh* afgedrukt. Huygens doet hier een duidelijke uitspraak over zijn afhankelijkheid van de Fransen [5, pp. 487–8]:

Volgen tot een besluyt noch eenige Voorstellen.

I. A en B speelen teghen malkander met 2 steenen / op dese conditie: dat A sal winnen als hy 6 oogen werpt / maer B sal winnen als hy 7 oogen werpt. A sal eerst eene werp doen ; daernae B twee werpen achtervolgens; dan weder A 2 werpen ; en soo voorts / tot dat d' een of d' ander sal winnen. De vrage is in wat reden de kans van A staet tegen die van B? antw. als 10355 tot 12276.

II. Drie speelders A, B, en C nemende 12 schijvē / van de welcke 4 wit zijn en 8 swart / speelen op conditie / dat die van haer blindeling eerst een witte schyve sal ghekosen hebben winnen sal / en dat A de eerste sal nemen / B de twee- de / en dan C, en dan wederom A, en soo vervolgens met beurten. De vra- ghe is in wat reden haere kanssen staen tegens malkander?

III. A wed tegens B / dat hy uyt 40 kaerten / dat is / 10 van ieder soort / 4 kaerten uyttrecken sal / soo dat hy van elcke soorte een sal hebbē. Hier wordt de kans van A tegen die van B gevonden / als 1000 tegen 8139.

IV. Genomen hebbende ghelijck hier te vooren 12 schyven / 4 witte en 8 swarte ; soo wed A tegen B dat hy blindeling 7 schyven sal daer uyt nemen / onder welcke 3 witte sullen zijn. Men vraegt in wat reden de kans van A staet tegen die van B.

V. A en B genomen hebbende elck 12 penningen spelen met 3 dobbelstee- nen op dese conditie : dat / als'er 11 oogen geworpen worden / A een penning aen B moet geven; maer als'er 14 geworpē werden / dat dan B een penning aen A moet geven ; en dat hy het spel winnen sal / die eerst al de penningen sal hebben. Hier werdt ghevonden de kans van A tegen die van B te zijn / als 244140625 tot 282429536481.

E Y N D E.

FIGUUR 4. Voorstellen

> Voorts is te weeten dat al over eenighen tijdt, sommige van de Vermaerste Wiskonstenaers van geheel Vranckrijck met dese soorte van Rekeningh zijn besigh geweest, op dat niemandt hier in, de eer van de eerste Invendie die de myne niet en is, my toe en schrijve. Doch sy luyden, offe wel sich onder malkanderen met veele swaere questien ter proeve stelden, soo hebbense nochtans elck sijn manier van uytvinding bedeckt gehouden. Soo dat ik van noode gehad heb, alles van vooren aen selfs te ondersoecken en te doorgronden: ende daerom oock noch niet verseeckert en ben, of wy hier in een selfde eerste beginsel getroffen hebben. Maer de uytkomste belangende, heb ick in veele questien ondervonden dat de myne van de haere geensins en verscheelt.

Toch zijn er, zoals Schneider opmerkt [9, pp. 182–183], gegronde redenen om aan deze weergave van Huygens te twijfelen. Huygens correspondeerde voor de afronding van de *Rekeningh* met andere 'Wiskonstenaers' uit 'Vranckrijck', en begreep al in september 1656 van een van hen, Carcavy, dat Pascal zich op hetzelfde 'eerste beginsel' baseerde als Huygens. Het lijkt er dus op dat hij zijn eigen onafhankelijkheid van Pascal en Fermat iets mooier voorstelt dan ze in werkelijkheid geweest is. Dit neemt overigens niet weg dat de *Rekeningh* een uiterst origineel stuk wiskunde is; Kleijne gaat daar in zijn bijdrage uitvoerig op in.

De *Rekeningh* bevat, nadat Huygens in VOORSTEL 3 zijn 'eerste beginsel' heeft geformuleerd, twee soorten problemen. In de eerste plaats zijn er vragen over de verdeling van de inzet als een kansspel voortijdig wordt afgebroken (het *problème des parties*, dat we ook bij Pascal en Fermat zagen) en in de tweede plaats zijn er vragen over dobbelen. Van beide soorten volgt hier een probleem.

Het afgebroken spel

In het volgende probleem vraagt Huygens zich af hoe de pot moet worden verdeeld als een spel afgebroken wordt op het moment dat de ene speler nog 1 ronde moet winnen om de pot mee naar huis te mogen nemen, en de andere speler nog drie spelen. In Huygens' woorden [5, p. 493]:

PROBLEEM 4 V. VOORSTEL.
Zy gestelt dat my 1 spel ontbreeckt, en die tegens my speelt 3 spelen. Nu moet men de verdeeling maken.

Huygens eigen oplossing werkt met recursie, en wel als volgt. Stel, zegt hij, er zit a in de pot. Dan zijn er bij het spelen van de eerstvolgende ronde twee even waarschijnlijke mogelijkheden:

1. Ik win. In dat geval strijk ik a op.
2. De ander wint. In dat geval ontstaat de situatie dat mij nog 1 spel ontbreekt, terwijl de ander er nog 2 moet winnen. Hoeveel deze spelpositie mij en de andere waard is, moet nog bepaald worden.

Huygens heeft de *Reekeningh* nauwkeurig in elkaar gezet, want geval 2 had hij net in het 4de VOORSTEL uiteengezet. In dit geval krijg ik a als ik de eerstvolgende ronde win, en ik heb recht op $\frac{1}{2}a$ als de ander de eerstvolgende ronde wint, want dan ontstaat er een gelijke stand (beiden moeten nog één ronde winnen) en kunnen beide spelers aanspraak maken op de helft van de pot. Deze spelpositie is dus voor mij $\dfrac{a+\frac{1}{2}a}{2} = \dfrac{3}{4}a$ waard, en voor de ander $\frac{1}{4}a$. De regel die hier achter zit is: als ik in een spel evenveel kans heb om a te winnen als om b te winnen, is mij dit $\frac{a+b}{2}$ waard. Zo'n berekening is nodig als iemand anders het spelen van mij zou overnemen. Die kan wat verdienen, dus die moet voor het mogen overnemen van het spel in de buidel tasten.

De uiteindelijke uitkomst van Probleem 4 is dus: $\dfrac{a+\frac{3}{4}a}{2} = \dfrac{7}{8}a$. Huygens formuleert zijn conclusie aldus [5, p. 493]:

> Soo heb ick dan een kans tegen een om a te hebben of $\frac{3}{4}a$, het welck so veel is door het 1^{ste} Voorstel als $\frac{7}{8}a$. En blijft $\frac{1}{8}a$ voor den anderen. Soo dat mijn kans is tot de syne als 7 tot 1.

Hier is goed te zien dat Huygens niet rekent met kansen in de moderne zin (een kans is een getal in $[0, 1]$) maar direkt met volgens een bepaalde verhouding te verdelen opbrengsten ('odds').

Hoe vaak moet je minstens gooien?
Bij de dobbelproblemen uit de *Reeckeningh* gaat het steeds om twee personen. De een biedt een weddenschap aan, en de ander moet zich afvragen of zij die zal aannemen. In voorstel 10 bijvoorbeeld gaat het er om bij een aantal worpen minstens één 6 te gooien. Welk minimum aantal worpen moet iemand bedingen voor zij het spel aanneemt. Dat is een kansrekeningsom die in de meeste boeken wel voorkomt, want (nu even in hedendaagse bewoordingen) de kans dat je in n worpen minsten één 6 gooit is $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. In een tabel ziet dat er zo uit:

n	1	2	3	4	5	6
kans op minstens één zes in n worpen	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{91}{216} < \frac{1}{2}$	$\frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$	...	...

Bij 3 worpen schiet zij er bij in, maar als ze bedingt 4 keer te mogen gooien is ze in het voordeel, want ze zal de weddenschap vaker winnen dan verliezen.

Huygens pakt het iets anders aan. We zien dat in een probleem dat hij op dit voorstel laat volgen [5, p. 498]:

PROBLEEM 5 XII. VOORSTEL,
Te vinden met hoe veel steenen men kan nemen ten eersten 2 sessen te werpen.

Ofwel: als je met iemand wedt dat je in n worpen minstens 2 zessen zult gooien, hoe veel stenen moet je dan nemen, dat wil zeggen: welke n moet je minimaal bedingen?
Eerst merkt Huygens op dat het niet uitmaakt of je n keer achtereen met één steen gooit, of in één keer met alle n stenen tegelijk. In zijn berekening neemt hij verder aan dat de stenen na elkaar gegooid worden. Wie in twee worpen meteen twee zessen denkt te kunnen gooien, zegt hij, maakt aanspraak op $\frac{1}{36}a$, want hij heeft 1 kans op dubbel-zes, en 35 op een ongunstige uitkomst, dus dat is $\dfrac{1 \cdot a + 35 \cdot 0}{36}$ waard.
Als hij accepteert om het in drie worpen te doen, heeft hij 5 kansen op $\frac{1}{36}a$ (als de eerste worp namelijk geen 6 is) en 1 kans op $\frac{11}{36}a$ (als de eerste worp 6 is; dan resteert nog de kans om met één dobbelsteen pas bij de tweede worp de eerste 6 te gooien, maar die had hij in VOORSTEL 10 berekend, zie de bovenstaande tabel). Dus in totaal maakt hij, als hij drie worpen accepteert, aanspraak op $\dfrac{5 \cdot \frac{1}{36}a + 1 \cdot \frac{11}{36}a}{6} = \dfrac{2}{27}a.$
Verder voert hij de berekeningen niet uit, maar meldt kortweg het resultaat [5, p. 498]:

> Op dese manier t'elckens een werp meer nemende soo werdt bevonden/ dat in 10 werpen met eene steen/ of met 10 steenen ten eersten/ kan genomen werden 2 sessen te werpen/ en dat met voordeel.

Aan het einde van de *Rekeningh* geeft Huygens vijf open problemen. Verschillende ervan komen we in het vervolg nog tegen, want ze hebben grote invloed gehad op degene die na Huygens de volgende grote stappen voorwaarts zette: Jakob Bernoulli.

FIGUUR 5. Jakob Bernoulli (1654–1705)

4. JAKOB BERNOULLI

In de aankondiging van de Vakantiecursus was het tweede probleem uit het lijstje van vijf opgenomen dat Huygens aan het eind van de *Rekeningh* had gegeven. De tekst luidt [5, p. 500]:

PROBLEEM 6 *Drie speelders A, B en C nemende 12 schijven/ van de welcke 4 wit zijn en 8 swart/ speelen op conditie/ dat die van haer blindeling eerst een witte schijve sal gekosen hebben winnen sal/ en dat A de eerste sal nemen/ B de tweede/ en dan C, en dan wederom A, en soo vervolgens met beurten. De vraghe is in wat reden haere kanssen staen tegens malkander?*

Toen Jakob Bernoulli (1654–1705) begon met het opschrijven van zijn gedachten (*Meditationes*) over kansrekening, nam hij de *Rekeningh* van Huygens ter hand, en loste eerst maar eens Huygens' vijf problemen op. Het tweede tweede probleem pakte hij als volgt aan [2, p. 26]:

> Het probleem kan op drie manieren opgevat worden; namelijk:
>
> 1. de gekozen schijven moeten worden teruggelegd voordat de volgende gaat kiezen.
> 2. òf hun aantal neemt gedurig af, door het niet terugleggen van de schijven
> 3. òf ze hebben elk hun eigen 12 schijven, nemen de een na de andere een van hun eigen schijven & leggen die niet terug.

We bekijken hier alleen het eerste geval [2, p. 26]:

> Noem de kans van $A = x$, de kans van $B = y$ en de kans van $C = z$.
> Als A begint te spelen, heeft hij 4 kansen om a te krijgen [a is hier, net

> als bij Huygens, de totale inzet, JvM] en 8 waarmee hij zijn recht om als eerste te trekken verliest en weer achter in de rij moet aansluiten. In dat geval wordt zijn kans z. Dit is hem in totaal $(4a + 8z)/12 = x$ waard.
> Voordat A begint met spelen heeft B 4 kansen om 0 te krijgen en 8 om als eerste te mogen trekken. In het laatste geval komt hij in de beginpositie van A, en heeft dan kans x. In totaal is dit hem $(4 \cdot 0 + 8x)/12 = y$ waard, ofwel $y = (2/3)x$.
> En C heeft bij aanvang 4 kansen om 0 te hebben en 8 om als tweede speler te mogen trekken en daarmee kans y te hebben. Dit betekent $(4 \cdot 0 + 8y)/12 = z$, ofwel $z = (2/3)y$, waaruit volgt $y = (3/2)z = (2/3)x$ en dus $9z = 4x$ & $x = (9/4)z$. Maar we wisten al dat $x = (4a + 8z)/12$, dus zal $(9/4)z = (a+2z)3$, waaruit volgt $z = (4/19)a, y = (6/19)a, x = (9/19)a$, dus de kansen $A : B : C$ verhouden zich als $9 : 6 : 4$.

Het terugrekenen tot aandelen in de totale inzet a is typisch in de stijl van Huygens. Het verbaast enigszins, want uit $9z = 4x$ en $y = (2/3)x$ volgt direct de verhouding $x : y : z$. Blijkbaar zetten zich ook bij grote wiskundige standaardoplossingen vast.

Bernoulli loste niet alleen Huygens' problemen op, hij formuleerde ook talrijke nieuwe problemen en ontwikkelde nieuwe methoden om ze op te lossen, in het bijzonder het systematisch tellen van aantallen permutaties en combinaties. Nikolaus Bernoulli (1687–1750), neef van Jakob, gaf de aantekeningen van zijn oom na diens dood uit. Dit boek [1], het eerste leerboek van de kansrekening, deed recht aan Huygens' *Rekeningh*, die er als eerste hoofdstuk in werd opgenomen. Laplace verwoordt Bernoulli's bijdrage als volgt [6, II,p. 96]:

> Jakob Bernoulli legde verschillende kansrekeningproblemen voor aan de wiskundigen, problemen waarvan hij later de oplossingen gaf. Tenslotte schreef hij zijn klassiek geworden *Ars Conjectandi* dat pas verscheen zeven jaar na zijn dood in 1706. [correct was geweest acht jaar na zijn door in 1705, JvM] De wetenschap der kansen wordt in dit boek veel grondiger bestudeerd dan in dat van Huygens: de auteur geeft erin een algemene theorie van combinaties en van reeksen, en past deze toe op allerlei moeilijke kansproblemen. Dit boek is bovendien opmerkelijk door zijn precieze en geniale inzichten, door de toepassing van de binomium-formule op dit soort problemen, en door het bewijs van de volgende stelling: [volgt een formulering van de wet van de grote getallen, JvM] Deze stelling is uiterst praktisch voor het ontdekken van de wetmatigheden en oorzaken van verschijnselen uit waarnemingen. Bernoulli hechtte, met recht, groot belang aan dit bewijs, waaraan hij —zoals hij zei— twintig jaar had gewerkt.

In de *Ars Conjectandi* nam Bernoulli niet alleen Huygens' problemen op, maar ook zijn eigen oplossingen. Voor het tweede probleem geeft hij een oplossing "in de stijl van Huygens" (identiek aan de bovengenoemde oplossing uit 1684) maar ook een uitwerking "volgens onze eigen methode", waarmee Bernoulli bedoelt dat hij een som van een reeks gebruikt. Bernoulli was een meester in het werken met reeksen, een onderwerp waar hij vanaf 1688 herhaaldelijk

over publiceerde. Deze tweede oplossing [2, pp. 143–4] volgt nu, juist vanwege de nieuwe techniek die Bernoulli ervoor introduceerde, in combinatie met het toepassen van voorwaardelijke kansen.
Laten er, zegt hij, in totaal a schijven zijn, waarvan b witte en c zwarte. En neem weer aan dat A, B en C om beurten een schijf nemen en die weer terugleggen. Wie de eerste witte heeft wint.
A heeft kans $\frac{b}{a}$ om in beurt 1 te winnen. B wint in beurt 2 als A in beurt 1 niet gewonnen heeft (kans $\frac{c}{a}$) en als B zelf wel een witte schijf trekt (kans $\frac{b}{a}$). De kans dat B in beurt 2 uit is, is dus $\frac{b}{a}\frac{c}{a}$. Zo gaat dit door. C is in beurt 3 uit met kans $\frac{b}{a}\frac{c^2}{a^2}$, A in beurt 4 met kans $\frac{b}{a}\frac{c^3}{a^3}$, en zo voorts. De totale kans voor A om te winnen is dus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b}{a}\frac{c^{3k}}{a^{3k}} = \frac{a^2 b}{a^3 - c^3}$$

Voor B en C zijn de kansen respectievelijk $\dfrac{abc}{a^3 - c^3}$ en $\dfrac{bc^2}{a^3 - c^3}$. De verhoudingen zijn dus $a^2 : ac : c^2$, en met $a = 12, b = 4, c = 8$ levert dit de intussen bekende verhouding $9 : 6 : 4$.

Huygens' probleem doet hier dus dienst als testcase voor een nieuwe aanpak. Op andere elementen uit de *Ars Conjectandi* en op het belang van het boek komen we hieronder terug. Tot besluit van deze paragraaf over Bernoulli volgt nog een probleem uit de *Meditationes* dat niet in de *Ars Conjectandi* terecht gekomen is [2, p. 70–1]:

PROBLEEM 7 *Drie spelers spelen om beurten met een dobbelsteen. Elk van hen schrijft de getallen van 1 tot en met 6 op, en zodra hij een bepaald aantal punten werpt streept hij het betreffende getal door. Als hij dit getal reeds doorgestreept had, speelt de volgende, totdat een van hen alle zes getallen doorgestreept heeft. Stel nu dat A nog twee getallen moet doorstrepen, B nog 4 & C nog 3, en dat A aan de beurt is om te gooien. De kansen worden gevraagd.*

Bernoulli geeft geen oplossing, maar merkt wel op:

> Dit voorbeeld kan analytisch [d.w.z. via vergelijkingen, JvM] of synthetisch [d.w.z. via reeksen] opgelost worden. Maar als je het synthetisch doet, moet goed opgepast worden dat geen overbodige gevallen opgelost worden, hetgeen analytisch niet kan voorkomen.

5. VAN BERNOULLI TOT POISSON

De *Ars Conjectandi* heeft problemen in zoveel verschillende richtingen opgeworpen dat het ondoenlijk is om alle lijnen op dezelfde wijze te blijven volgen als tot dit punt gebeurd is. We beperken ons daarom nu verder tot het globaal aangeven van de ontwikkelingen na Bernoulli.

Het eerste waarin Bernoulli veel verder ging dan Huygens was het ontwikkelen van de combinatoriek, nodig voor het tellen van permutaties en combinaties.

Pascal had al veel eerder een equivalente theorie opgesteld, maar die was slechts zeer beperkt bekend geworden en in elk geval niet tot Bernoulli doorgedrongen. We danken aan Bernoulli het inzicht dat de kans op k successen in een reeks van n experimenten gelijk is aan $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, als de kans op succes bij één experiment p is en de kans op een mislukking $1-p$. In samenhang daarmee liet hij zien hoe $\binom{n}{k}$ uit n en k berekend moet worden, en hij bewees de binomiumformule. Daarbij paste hij, als een van de eersten in de geschiedenis, het principe van volledige inductie toe.

En kijk nu eens, lijkt Bernoulli gedacht te hebben, hoe mooi je met behulp van combinaties en binomiaalcoëfficiënten sommige problemen van Huygens kunt oplossen. Als voorbeelden geeft hij, direkt na het combinatorische hoofdstuk 2 van de *Ars Conjetandi*, het derde en vierde probleem van Huygens, die hier in Bernoulli's versie volgen [2, pp. 198–9]:

PROBLEEM 8 *A speelt er tegen B om dat hij uit een spel met 40 kaarten, d.w.z. 10 van elke soort, 4 kaarten zal trekken, zo dat hij er van elke soort één heeft. Gevraagd wordt de verhouding van de kansen.*

en

PROBLEEM 9 *Met 12 stenen, waarvan 4 witte & 8 zwarte, speelt A er tegen B om dat, wanneer hij blind 7 stenen zal nemen, daaronder drie witte zullen zijn. Gevraagd wordt de verhouding van de kans van A tot de kans van B.*

De oplossingen laten we aan de lezer, die bovendien altijd nog bij Bernoulli te rade kan gaan.

Combinatoriek en de binomiale verdeling bleven na Bernoulli de kern van de kansrekening uitmaken. Maar ze leidden ook tot nieuwe vragen, bijvoorbeeld bij Abraham de Moivre (1667–1754). De Moivre bestudeerde het gedrag van de binomiale verdeling voor het geval dat n zeer groot wordt. Daarbij gebruikte hij de benadering voor $n!$, die Stirling in 1730 als reaktie op een vraag van De Moivre had bepaald, en vond een methode om overschrijdingskansen te berekenen die equivalent was aan de toepassing van de normale verdeling. Gauss en Laplace zetten dit werk rond 1800 voort. Het limietgedrag van de binomiale verdeling als n naar oneindig gaat terwijl p tegelijk naar 0 nadert volgens $n \cdot p =$ constant werd door Poisson uitgewerkt in de naar hem genoemde verdeling, verschenen in *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités* (Paris 1837).

De titel van Poissons werk geeft nog een ander gebied aan, waarin Bernoulli veel werk gedaan heeft, en dat door zijn navolgers is voortgezet, namelijk dat van de toegepaste kansrekening. Het vierde en tevens laatste hoofdstuk van de *Ars Conjectandi* ging over "Het gebruik en de toepassing van de voorgaande theorie in civiele, ethische en economische zaken". Dit thema, dat samengaat met de opkomst van de statistiek, vond veel navolging, om te beginnen bij Daniel en Nikolaus Bernoulli, twee neven van Jakob, die toepassingen gaven op het gebied van medische en juridische zaken.

Veel is in deze laatste paragraaf onbesproken gebleven. Men raadplege bijvoorbeeld [3], [4] of [10] voor een completer beeld. Maar als uit de eerste paragrafen het belang en de rol van problemen in de beginperiode van de kansrekening duidelijk geworden is, dan heeft de auteur zijn inzet terugverdiend.

REFERENTIES

[1] JAKOB BERNOULLI, *Ars Conjectandi*, Basel 1713. Met commentaar en aanverwante stukken herdrukt in [2]

[2] B.L. VAN DER WAERDEN (ed.), *Die Werke von Jakob Bernoulli* Band 3, Basel: Birkhäuser 1975

[3] L. DASTON, *Classical Probability in the Enlightenment* Princeton: Princeton University Press 1988

[4] I. HACKING, *The Taming of Chance*, Cambridge: Cambridge University Press 1990

[5] CHRISTIAAN HUYGENS, 'Van rekeningh in spelen van geluck', pp. 487–500 in: F. van Schooten, *Mathematische Oeffeningen begrepen in vijf boecken*, Amsterdam: Gerrit van Goedesbergh 1659–1660. Eerder verschenen in Latijnse vertaling door Van Schooten, Leiden 1656–1657, die herdrukt werd in [1].

[6] PIERRE-SIMON LAPLACE, *Essai philosophique sur les probabilités* 5^{e} ed., Paris 1825. Hier geciteerd uit de herdruk Paris 1921. Ook beschikbaar in Engelse vertaling *Philosophical essay on probabilities* van de hand van A.I. Dale, New York etc.: Springer 1995.

[7] L. BRUNSCHVICG, P. BOUTROUX (eds.), *Œuvres de Blaise Pascal* Vol. III, Paris 1923

[8] I. SCHNEIDER (ed.), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1988

[9] I. SCHNEIDER, 'Christiaan Huygens' non-probabilistic approach to a calculus of games of chance', *De zeventiende eeuw* 12 (1996) 1, pp. 171–185

[10] S.M. STIGLER, *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*, Cambridge, MA & London: Harvard University Press

CWI Vakantiecursus 1997

pp. 115 - 128

Hoe het Toeval Fractals Voortbrengt

J.M. Aarts
TU Delft, Faculteit TWI, Mekelweg 4, 2628 CD Delft
e-mail: j.m.aarts@twi.tudelft.nl

Samenvatting

In zijn bestseller *Fractals everywhere* [1] beschrijft BARNSLEY een methode om fractals te ontwerpen. Bij deze methode speelt het toeval een essentiële rol. In deze voordracht vertellen we de wiskundige achtergronden van de methode. De voordracht wordt ondersteund door computerexperimenten.

1. WAT ZIJN FRACTALS?

Het is niet zo eenvoudig om een definitie van *fractal* te geven en we zullen dat ook niet doen. De naam *fractal* is afkomstig van MANDELBROT [7]. Het woord "fractal" is afgeleid van het Latijnse adjectief *fractus*, dat op zijn beurt verwant is met het werkwoord *frangere*, dat *breken* betekent. Toen Mandelbrot zijn studie van de fractalen begon waren er in de literatuur vele ideeën en begrippen te vinden die bij de ontwikkeling van de theorie gebruikt konden worden. In tegenstelling tot vele schrijvers van populaire boekjes over fractalen (en chaos) kende Mandelbrot de literatuur en in het bijzonder die van de topologie erg goed. Een fractal werd door Mandelbrot gedefinieerd als een figuur waarvan de topologische dimensie en de Hausdorff-dimensie verschillend waren. De meeste ruimten die men fractal noemt, vallen onder deze definitie, maar niet alle. De zogenaamde *Mandelbrotverzameling* (zie bijvoorbeeld [10]) is geen fractal in bovengenoemde zin. In [4] geeft FALCONER een opsomming van karakteristieke eigenschappen van fractals. De eerste karakteristieke eigenschap is de grillige vorm, zowel globaal als lokaal. De vorm is zó grillig dat het onmogelijk is die te beschrijven op de in de analyse en gewone meetkunde gebruikelijke wijze; ook dit geldt zowel lokaal als globaal. Een fractal heeft een zekere mate van zelfgelijkvormigheid; op micro-niveau ziet de verzameling er bijna hetzelfde uit als op macro-niveau. In veel gevallen heeft een fractal een eenvoudige recursieve definitie (Dit hangt natuurlijk samen met de vorige eigenschap).

In [1] is een methode ontwikkeld om fractals te gebruiken bij het coderen en reproduceren van figuren. Belangrijk daarbij is dat de hoeveelheid informatie die nodig is om een beeld vast te leggen, in omvang beperkt is (beeldcompressie) en, vervolgens, ook eenvoudig reproduceerbaar is. De belangrijkste elementen van de methode zullen we uiteenzetten. De fractals die door BARNSLEY gebruikt worden zijn tamelijk eenvoudig van structuur. Deze fractals worden voortgebracht door speciale gelijkvormigheidstransformaties van het vlak V. Een *gelijkvormigheidstransformatie* f met *factor* $r \geq 0$ is een afbeelding met de eigenschap

$$d\big(f(x), f(y)\big) = rd(x,y), \qquad \text{voor alle } x,y \text{ in } V.$$

In de volgende paragraaf zullen we de structuur van de gelijkvormigheidstransformaties ophelderen. Een *IFS* $\mathcal{F}$ is een stelsel $(f_1, \cdots, f_k)$, $k > 1$, van gelijkvormigheidstransformaties met factoren $r_1, \cdots, r_k$, waarbij $0 < r_i < 1$ voor alle i. Het acronym *IFS* is afgeleid van *Iterated Function System*. De actie van het IFS $\mathcal{F}$ is als volgt. Zij A een compacte (dat is, gesloten en begrensde) deelverzameling van het vlak. Het beeld $\mathcal{F}[A]$ is vastgelegd door

$$\mathcal{F}[A] = f_1[A] \cup \cdots \cup f_k[A].$$

In de volgende pargraaf zullen we zien dat ieder IFS $\mathcal{F}$ een invariante verzameling heeft; we noemen een niet-lege compacte deelverzameling K van het vlak een *invariante verzameling* van $\mathcal{F}$ indien

$$K = f_1[K] \cup \cdots \cup f_k[K], \quad \text{oftewel,} \quad \mathcal{F}[K] = K.$$

Alvorens voorbeelden te bespreken, definiëren we eerst nog de gelijkvormigheidsdimensie. In al onze voorbeelden is deze dimensie gelijk aan de eerder genoemde Hausdorff-dimensie, maar de berekening van de gelijkvormigheidsdimensie is veel eenvoudiger. Ter rechtvaardiging van de definitie hebben we het volgende lemma nodig.

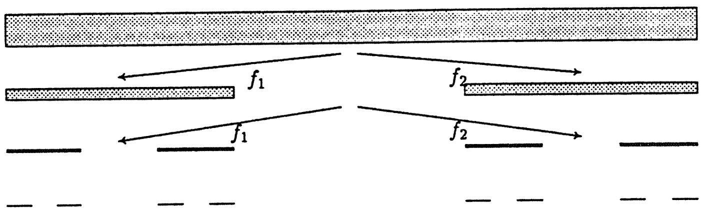
LEMMA 1.1 *Neem aan dat $0 < r_i < 1$, voor $i = 1, \cdots, k$, waarbij $k \geq 2$. Dan is er een uniek (positief) getal s zó dat $\sum_{i=1}^k r_i^s = 1$.*

BEWIJS. Definieer $\Phi(x) = \sum_{i=1}^k r_i^x$, $x \geq 0$. Voor de afgeleide van $\Phi(x)$ vinden we $\Phi'(x) = \sum_{i=1}^k r_i^x \log r_i$, $x > 0$. Hieruit zien we dat Φ strikt dalend is. Verder is $\Phi(0) = k$ en $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0$. Met de tussenwaardestelling vinden we een positieve s met $\Phi(s) = 1$. De uniciteit van s volgt uit de strikte monotonie van Φ. □

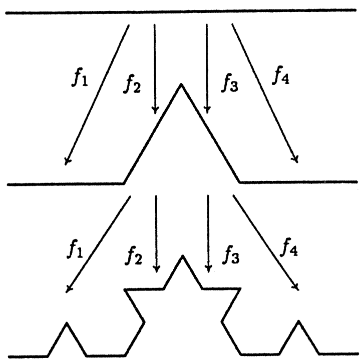
De *gelijkvormigheidsdimensie* van een IFS met de factoren $(r_1, \cdots, r_n)$ is het unieke getal s met $\sum_{i=1}^n r_i^s = 1$. We geven nu enkele voorbeelden.

VOORBEELD 1.2 . Het eerste voorbeeld is tevens het belangrijkste: het Cantordiscontinuum, door sommigen wel de moeder van alle fractals genoemd. Het *Cantordiscontinuum* C is de invariante deelverzameling van het IFS $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$, waarbij

$$f_1(x_1, x_2) = \tfrac{1}{3}(x_1, x_2) \text{ en } f_2(x_1, x_2) = \tfrac{1}{3}(x_1, x_2) + (\tfrac{2}{3}, 0).$$



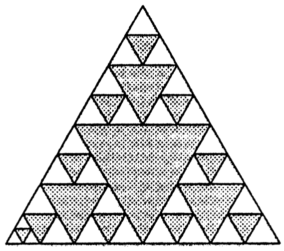
FIGUUR 1. Het Cantor-discontinuum



FIGUUR 2. De sneeuwvlokkromme

Beide factoren zijn $\frac{1}{3}$; de gelijkvormigheidsdimensie is dus $\log_3 2$. De afbeelding f_1 is een vermenigvuldiging met een factor $\frac{1}{3}$ met het punt $(0,0)$ als centrum; de afbeelding f_2 is een vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$, maar nu met $(1,0)$ als centrum van vermenigvuldiging. In de figuur 1 is een "opgedikt" eenheidsinterval getekend. Verder is de actie van $\mathcal{F}$ aangegeven met de pijlen. De opeenvolgende beelden onder $\mathcal{F}$ zijn onder elkaar getekend (anders zouden de beelden onzichtbaar zijn).

VOORBEELD 1.3 . Een ander voorbeeld van een fractal is de zogenaamde *sneeuwvlokkromme*, ook wel de *von Koch-kromme* genaamd. De sneeuwvlokkromme is de invariante verzameling van een IFS $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ met alle factoren gelijk aan $\frac{1}{3}$. De actie van $\mathcal{F}$ is aangegeven in figuur 2. In de figuur zijn de opeenvolgende beelden weer onder elkaar getekend.
f_1 is een vermenigvuldiging vanuit $(0,0)$ met de factor $\frac{1}{3}$.
f_2 is f_1 gevolgd door een translatie volgens $\left(\frac{1}{3},0\right)$ en een rotatie om het punt $\left(\frac{1}{3},0\right)$ over $\frac{\pi}{3}$.
f_3 is f_1 gevolgd door een translatie volgens $\left(\frac{1}{3},0\right)$ en een rotatie om het punt



FIGUUR 3. De Sierpiński-kromme

$(\frac{2}{3}, 0)$ over $-\frac{\pi}{3}$.
f_4 is f_1 gevolgd door een translatie volgens $(\frac{2}{3}, 0)$.
De dimensie van het IFS is $\frac{\ln 4}{\ln 3} = \log_3 4$.

VOORBEELD 1.4 . De *Sierpiński-kromme*, figuur 3, is de invariante deelverzameling van een systeem $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ waarvan alle factoren gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$. De gelijkvormigheidstransformaties van $\mathcal{F}$ zijn

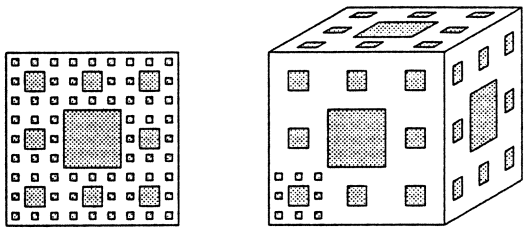
$$f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$f_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

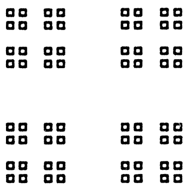
$$f_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De dimensie van de Sierpiński-kromme is $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3$. Toen Sierpiński deze kromme definieerde, moesten fractals nog uitgevonden worden. In die tijd probeerde men antwoord te vinden op de vraag wat men onder een kromme moet verstaan. Het door Sierpiński gegeven voorbeeld was een belangrijke bijdrage tot de beantwoording van die vraag. Veel van de voorbeelden van fractals zijn gemaakt in de tijd dat de topologie nog in de kinderschoenen stond en zijn later door de beoefenaren der fractale meetkunde herontdekt.

VOORBEELD 1.5 In figuur 4 zijn nog twee fractals getekend. De eerste, links in de figuur, wordt het *vloerkleed van Sierpiński* genoemd. Het vloerkleed kan beschreven worden als invariante verzameling van een IFS bestaande uit acht gelijkvormigheidstransformaties, elk met factor $\frac{1}{3}$. De dimensie van het vloerkleed is $\log_3 8$. De *spons van Menger*, in de figuur rechts, is een ruimtelijke figuur. Met een kleine aanpassing van de definitie van IFS kan ook deze figuur beschreven worden als invariante deelverzameling van een IFS bestaande uit twintig gelijkvormigheidstransformaties van de ruimte, elk met factor $\frac{1}{3}$. De dimensie van de Menger-spons is $\log_3 20$. In deze voordracht zullen we ons verder alleen bezig houden met fractals in het vlak.



FIGUUR 4. Vloerkleed van Sierpiński (links) en Spons van Menger (rechts)

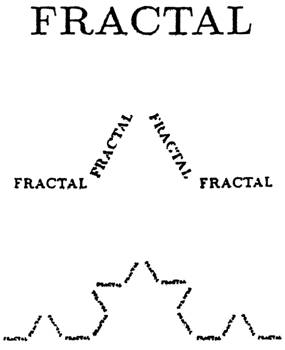


FIGUUR 5. $C \times C$

VOORBEELD 1.6 Het laatste voorbeeld gaat weer over het Cantordiscontinuum C uit voorbeeld 1.2. Het product van het Cantordiscontinuum met zichzelf, $C \times C$, is een deelverzameling van het vierkant, figuur 5. We kunnen $C \times C$ beschrijven als invariante verzameling van een IFS met vier transformaties elk met factor $\frac{1}{3}$. De gelijkvormigheidsdimensie van dit IFS wordt $\log_3 4$. Merk op dat de hier gevonden waarde van de gelijkvormigheidsdimensies verschillend is van die uit voorbeeld 1.2. Toch zijn C en $C \times C$ topologisch hetzelfde (Er is een in beide richtingen continue bijectie tussen C en $C \times C$) en dus zijn ook de topologische dimensies gelijk (namelijk 0). Maar misschien komt deze mededeling op dit moment wel als een verrassing. Dat de gelijkvormigheidsdimensies van C en $C \times C$ verschillend zijn, komt door het feit dat de gelijkvormigheidsdimensie blijkbaar afhangt van de metriek en niet alleen van de topologische structuur.

Ook "gewone" figuren kunnen met een IFS voortgebracht worden, al zullen die niet onze belangstelling hebben. Zo is, bijvoorbeeld, het eenheidsinterval de invariante verzameling van het IFS (f_1, f_2, f_3) met alle factoren gelijk aan $\frac{1}{3}$, gedefinieerd op $\mathbb{R}$ door

$$f_1(x) = \tfrac{1}{3}x, f_2(x) = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3} \text{ en } f_3(x) = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}.$$



FIGUUR 6. Op zoek naar de invariante deelverzameling

Merk op dat de gelijkvormigheidsdimensie 1 wordt. Gelukkig maar. Op dezelfde wijze kunnen we het vierkant genereren met een IFS bestaande uit negen afbeeldingen elk met factor $\frac{1}{3}$. De dimensie wordt 2. Voor de kubus vinden we IFS van 27 afbeeldingen elk met factor $\frac{1}{3}$. De dimensie wordt 3.

2. Theoretische achtergrond

We beschouwen een willekeurig IFS, $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k)$, in het vlak. Uitgaande van een willekeurige, niet-lege, compacte verzameling K vormen we de verzameling

$$\mathcal{F}[K] = f_1[K] \cup \cdots \cup f_k[K].$$

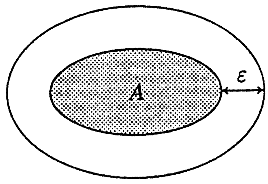
Onder iteratie (vandaar de I in IFS) ontstaat er een rij

$$K, \mathcal{F}[K], \mathcal{F}^2[K], \ldots, \mathcal{F}^n[K], \ldots$$

Hierin is $\mathcal{F}^2$ de samenstelling $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ van $\mathcal{F}$ met zichzelf, enzovoort. Het blijkt dat de $\mathcal{F}^n(K)$ "convergeren" naar de invariante verzameling van het systeem. In de figuur 6 is het IFS uit voorbeeld 1.3 toegepast op de figuur FRACTAL. Experimenteel blijkt zo'n invariante deelverzameling altijd te bestaan. Hoe is dat te verklaren?

We beginnen met een nadere uitleg van het convergentiebegrip. Daartoe leggen we eerst vast wat we onder de afstand van twee verzamelingen dienen te verstaan. We beperken ons daarbij tot de niet-lege, compacte deelverzamelingen van het vlak. De collectie van alle compacte, niet-lege deelverzamelingen van het vlak duiden we aan met $\mathcal{K}(V)$. Voor iedere A uit $\mathcal{K}(V)$ en iedere $\varepsilon > 0$ definiëren we de open verzameling $B_\varepsilon(A)$, de *ε-omgeving* van A, door $B_\varepsilon(A) = \{ y : d(y, A) < \varepsilon \}$. Op $\mathcal{K}(V)$ definiëren we de *Hausdorff-metriek* door

$$D(G, H) = \inf\{ \varepsilon : G \subset B_\varepsilon(H) \text{ en } H \subset B_\varepsilon(G) \},$$



FIGUUR 7. $B_\varepsilon(A)$

voor alle G en H in $\mathcal{K}(V)$. We zullen de Hausdorff-metriek steeds met D aanduiden. We dienen nog te controleren dat D inderdaad een metriek is, d.w.z. dat voor alle G, H en K in $\mathcal{K}(V)$ geldt

1. $D(G,H) \geq 0$; $D(G,H) = 0$ dan en slechts dan als $G = H$,
2. $D(G,H) = D(H,G)$,
3. $D(G,K) \leq D(G,H) + D(H,K)$

Omdat controle van 1 en 2 triviaal is, beperken we ons tot de controle van 3. Laat G, H en K elementen van $\mathcal{K}(V)$ zijn. Zij $\eta > 0$ en $k \in K$. Uit de definitie van $D(H,K)$ volgt dat $K \subset B_{D(H,K)+\frac{\eta}{2}}(H)$. Er is dus een h in H zó dat $d(h,k) < D(K,H) + \frac{\eta}{2}$. Op analoge wijze is er een g in G zó dat $d(g,h) < D(G,H) + \frac{\eta}{2}$. We vinden

$$d(g,k) \leq d(g,h) + d(h,k) < D(G,H) + D(H,K) + \eta = \varphi(\eta).$$

Dit geldt voor iedere k uit K en iedere $\eta > 0$. Hieruit volgt nu dat geldt $K \subset B_{\varphi(\eta)}(G)$. Op dezelfde wijze vinden we $G \subset B_{\varphi(\eta)}(K)$. Zo komt er $D(G,K) \leq \varphi(\eta)$. Omdat η willekeurig is, volgt nu

$$D(G,K) \leq D(G,H) + D(H,K).$$

Hiermee is de controle van 3 voltooid.

We brengen in herinnering: een rij $\langle a_n \rangle_n$ in een metrische ruimte is een *Cauchy rij* indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ een N is zó dat voor alle $n > N$ en $m > N$ geldt $d(a_n, a_m) < \varepsilon$. Een metrische ruimte is *volledig* indien iedere Cauchy-rij convergent is. De $\mathbb{R}^n$ is een volledige ruimte.

De ruimte $\mathcal{K}(V)$ is volledig. Dit is een heel belangrijke eigenschap, maar het zou te ver voeren om de eigenschap hier te bewijzen. Bij de bestudering van $\mathcal{K}(V)$ zullen we gebruik maken van de volgende contractiestelling van BANACH.

STELLING 2.1 (CONTRACTIESTELLING) *Beschouw een volledige metrische ruimte X en een contractie $f : X \to X$ met contractie-constante c, d.w.z. $0 \leq c < 1$ en $d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y)$, voor alle x en y in X. Dan is er precies één punt p zó dat $p = f(p)$. Dit punt p kan worden gevonden als limiet van de rij $\langle a_n \rangle_n$ van het iteratieproces $a_{n+1} = f(a_n)$ met willekeurige startwaarde a_0 in X.*

Deze stelling is een van de weinige stellingen waarvan het bewijs belangrijker is dan de stelling zelf. Daarom besteden we aandacht aan het bewijs.

BEWIJS. Zij a_0 een willekeurig uit X. Definieer a_n, $n \geq 1$, zoals beschreven in de stelling. Met volledige inductie bewijst men dat $d(a_{n+1}, a_n) \leq c^n\, d(a_1, a_0)$ voor alle n. Hieruit volgt dat $\langle a_n \rangle_n$ een Cauchy-rij is. Omdat X volledig is, convergeert de rij $\langle a_n \rangle_n$. Zij p de limiet van de rij. Omdat f (uniform) continu is, geldt

$$p = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(a_{n-1}) = f\big(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\big) = f(p).$$

Dus p is een dekpunt van f. Als q een dekpunt van f is, dan is

$$d(p,q) = d\big(f(p), f(q)\big) \leq c d(p,q).$$

Omdat $c < 1$, volgt er $p = q$. □

De contractiestelling heeft enorm veel toepassingen; te denken valt aan convergentie bij numerieke nulpuntsbepaling via iteratiemethoden en aan existentiebewijzen bij differentiaalvergelijkingen. We kunnen de stelling ook aanwenden om de structuur van de gelijkvormigheidstransformaties van een IFS te bepalen. Zij daartoe f een gelijkvormigheidstransformatie met factor $r > 0$. We onderscheiden verschillende gevallen.

Als $r = 1$ dan is f een isometrische afbeelding van V naar zichzelf. Het is bekend uit de elementaire meetkunde dat f dan gelijk is aan een translatie, een glijspiegeling, een spiegeling of een rotatie.

Als $r < 1$, dan heeft f volgens de contractiestelling een uniek dekpunt, zeg p. Bekijk nu de afbeelding $g = \frac{1}{r} \cdot f$: dit is een isometrische afbeelding met een vast punt, namelijk p. Daaruit volgt dat g een rotatie of spiegeling is. De afbeelding f is dus de samenstelling van een rotatie of spiegeling en de vermenigvuldiging met r vanuit het centrum p.

Als $r > 1$ dan bekijken we de afbeelding $h = \frac{1}{r^2} \cdot f$. Volgens het zojuist besprokene, is h de samenstelling van een rotatie of spiegeling en een vermenigvuldiging met $\frac{1}{r}$; daaruit volgt dat f de samenstelling is van een rotatie of spiegeling en een vermenigvuldiging met r.

Een gelijkvormigheidstransformatie f met factor r heeft, in coördinaten, dus een van de volgende twee vormen

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \\ f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ r\sin\theta & -r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We gaan de contractiestelling toepassen op de volledige ruimte $\mathcal{K}(V)$ en een IFS $\mathcal{F}$ en krijgen zo een bewijs van het feit dat iedere IFS een invariante verzameling heeft.

STELLING 2.2 *Zij* $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ *een IFS met factoren* r_i, $i = 1, \ldots, k$. *Dan heeft* $\mathcal{F}$ *een invariante verzameling* K. *De invariante verzameling* K *is compact* *en kan in de ruimte $\mathcal{K}(V)$ gevonden worden als limiet van de rij $\langle A_n \rangle_n$ van het iteratieproces*

$$A_{n+1} = \mathcal{F}[A_n] = f_1[A_n] \cup \cdots \cup f_k[A_n],$$

waarbij A_0 een willekeurige niet-lege compacte verzameling in X is.

BEWIJS. We werken in de volledige ruimte $\mathcal{K}(V)$. De actie van $\mathcal{F}$ is

$$\mathcal{F}(A) = f_1[A] \cup \cdots \cup f_k[A].$$

We zien direct dat $\mathcal{F}(A)$ compact is; $\mathcal{F}$ is dus een afbeelding van $\mathcal{K}(V)$ naar $\mathcal{K}(V)$. Zij $r = \max\{r_1, \dots, r_k\}$. We laten zien dat r een contractie-constante is voor $\mathcal{F}$, d.w.z.

$$D\big(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(E)\big) \leq rD(A, E), \quad \text{voor alle } A, E \in \mathcal{K}(X).$$

Zij $\eta > D(A, E)$. Zij $x \in \mathcal{F}(A)$. Dan is er een x' in A en een i met $1 \leq i \leq n$ zó dat $x = f_i(x')$. Er is dan een y' in E met $d(x', y') < \eta$. Noem nu $y = f_i(y')$. Dan is $y \in \mathcal{F}(E)$ en $d(x, y) \leq r_i d(x', y') \leq r\eta$. Hieruit volgt dat $x \in B_{r\eta}\big(\mathcal{F}(E)\big)$. Dit geldt voor alle x in $\mathcal{F}(A)$. Hieruit volgt $\mathcal{F}(A) \subset B_{r\eta}\big(\mathcal{F}(E)\big)$. Op dezelfde wijze volgt $\mathcal{F}(E) \subset B_{r\eta}\big(\mathcal{F}(A)\big)$. We vinden $D\big(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)\big) \leq r\eta$. Omdat dit voor iedere $\eta > D(A, B)$ geldt, hebben we bewezen dat $D\big(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)\big) \leq rD(A, B)$. We zien dat inderdaad r een contractie-constante voor $\mathcal{F}$ is. De stelling volgt nu uit de contractiestelling. □

Het bewijs van de contractiestelling geeft ons ook inzicht in de nauwkeurigheid in de benadering van de invariante verzameling bij het iteratieproces. Dit is belangrijk genoeg om in een aparte stelling geformuleerd te worden.

STELLING 2.3 *Gegeven is het IFS $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k)$ met invariante verzameling K. Zij $r < 1$ het maximum van de factoren van het IFS. Laat nu A een willekeurige niet-lege, compacte deelverzameling zijn van V, m.a.w. A is een willekeurig element uit $\mathcal{K}(V)$. Dan geldt*

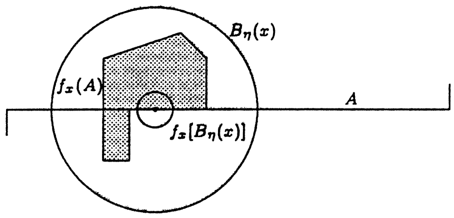
$$D(A, K) \leq \frac{1}{1-r} D\Big(A, \mathcal{F}(A)\Big).$$

De stelling geeft ons een schatting voor de afstand van een willekeurige niet-lege, compacte deelverzameling A tot de invariante verzameling K met behulp van de afstand van A tot $\mathcal{F}(A)$.

BEWIJS. Voor het bewijs moeten we even terug naar het bewijs van de contractiestelling. Het bewijs van die stelling vervolgend vinden we

$$d(a_0, a_n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} d(a_k, a_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} c^k d(a_0, a_1) \leq \frac{1}{1-c} d(a_0, a_1).$$

Hieruit volgt dan $d(a_0, p) \leq \frac{1}{1-c} d(a_0, a_1)$. Het IFS $\mathcal{F}$ heeft een contractieconstante $\leq r$. Door het nu gevonden resultaat te vertalen naar de ruimte $\mathcal{K}(V)$ vindt men gemakkelijk een bewijs voor de stelling. □



FIGUUR 8. $B_\eta(x)$ en $f_x[A]$

We kunnen nu laten zien dat we *iedere* gegeven compacte deelverzameling van V willekeurig dicht kunnen benaderen met de invariante verzameling van een geschikt gekozen IFS. Het moge (na lezing van het bewijs) duidelijk zijn waaraan de volgende stelling haar naam ontleent. De stelling is het absolute hoogtepunt uit de theorie van BARNSLEY [1]

STELLING 2.4 (COLLAGE-STELLING) *Laat A een compacte deelverzameling zijn van V. Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een IFS $\mathcal{F}$ zó dat voor de invariante deelverzameling K van $\mathcal{F}$ geldt $D(A, K) < \varepsilon$.*

BEWIJS. Noem $\frac{\varepsilon}{2} = \eta$. Voor iedere x uit A bepalen we een gelijkvormigheidstransformatie f_x zó dat $f_x[A] \subseteq B_\eta(x)$. We zorgen er voor dat de factor van f_x in ieder geval kleiner dan $\frac{1}{2}$ is. Merk op dat $f_x[B_\eta(x)]$ een open schijfje is dat bevat is in $B_{\frac{\eta}{2}}(x)$. De collectie $\{\, f_x[B_\eta(x)] : x \in A \,\}$ is een open overdekking van de compacte verzameling A; de collectie heeft een eindige deeloverdekking

$$\{\, f_{x_1}[B_\eta(x_1)], \dots , f_{x_n}[B_\eta(x_k)] \,\}.$$

We definiëren het IFS $\mathcal{F}$ door $\mathcal{F} = (f_{x_1}, \dots , f_{x_k})$ en berekenen $D\bigl(A, \mathcal{F}(A)\bigr)$. Er geldt

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} f_{x_i}[B_\eta(x_i)] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\eta}{2}}(x_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\eta}{2}}\left(f_{x_i}[A]\right) = B_{\frac{\eta}{2}}\left(\mathcal{F}[A]\right)$$

en

$$\mathcal{F}(A) = \bigcup_{i=1}^{k} f_{x_i}[A] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_\eta(x_i) \subseteq B_\eta(A).$$

We vinden $D\bigl(A, \mathcal{F}(A)\bigr) < \eta$. Uit de vorige stelling volgt nu $D(A, K) < \varepsilon$.

□

3. HOE HET TOEVAL FRACTALS VOORTBRENGT

In [1] wordt uiteengezet hoe de bovenstaande theorie kan worden gebruikt voor het maken van plaatjes van fractals met behulp van een computer. Zij gegeven een IFS $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k)$. Voor de volledigheid merken we op dat in [1] de f_i affiene transformaties zijn. Een *affiene* transformatie f is een transformatie van de vorm

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

De beschouwde affiene transformaties zijn contracties, zie stelling 2.1. De in de vorige paragraaf ontwikkelde theorie is ook geldig voor deze meer algemene IFS-en. Opmerkelijk is dat een affiene afbeelding door 6 getallen is vastgelegd. Dat betekent dat, wanneer een fractal beschreven wordt met behulp van een IFS $(f_1, \dots, f_k)$, die fractal door $6k$ getallen volledig is vastgelegd.

Om nu een plaatje van de door het IFS $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k)$ voortgebrachte fractal te maken, ligt het voor de hand om plaatjes te maken van de verzamelingen $\mathcal{F}^n(A)$, waarbij A een willekeurige compacte verzameling is en n voldoende groot gekozen wordt. Deze methode heeft enige kans van slagen als de factoren niet te groot zijn. Toch is de methode zeer bewerkelijk, ook al begint men een eenvoudige "startfiguur" A. Een van de grootste problemen bij deze aanpak is wel dat bij een nieuwe keuze van n de hele figuur die verkregen was, gewist moet worden.

Een bruikbare variant van deze methode is de volgende. We nemen voor de startfiguur een éénpuntige verzameling: $A = \{a\}$. We weten dat de rij $\langle \mathcal{F}^n[\{a\}]\rangle_n$ naar de invariante verzameling van het IFS convergeert. Eénmaal toepassen van $\mathcal{F}$ geeft de punten

$$f_1(a), \dots, f_k(a).$$

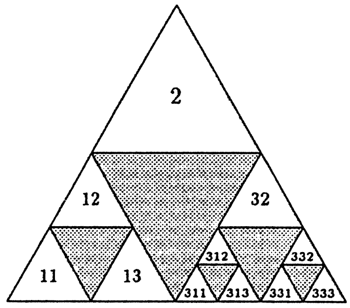
Tweemaal toepassen van $\mathcal{F}$ geeft de punten

$$f_1 \circ f_1(a), f_1 \circ f_2(a), \dots, f_1 \circ f_k(a), f_2 \circ f_1(a), \dots, f_k \circ f_k(a).$$

Het aantal punten in de verzameling $\mathcal{F}^n[\{a\}]$ is k^n; het aantal punten neemt tijdens de iteratie dus exponentieel toe. Laten we om de gedachte te bepalen eens aannemen dat alle factoren van het IFS kleiner zijn dan $\frac{1}{2}$. Dan is voor $n = 10$ de afstand van de benaderende verzameling $\mathcal{F}^n[A]$ tot de invariante verzameling van het IFS kleiner dan .001; gelet op de gebruikelijke resolutie, zijn dan het plaatje van de benaderende verzameling en de invariante verzameling niet te onderscheiden. Omdat het aantal punten onder iteratie van $\mathcal{F}$ exponentieel toeneemt vallen de punten van de eerste iteraties, bijna letterlijk, in het niet bij de punten van de latere iteraties. Daarom dan ook dat men alle opgesomde punten tekent en de verzameling

$$\{a\} \cup \mathcal{F}[\{a\}] \cup \mathcal{F}^2[\{a\}] \cup \dots \cup \mathcal{F}^n[\{a\}] \cup \cdots$$

als benadering van de limietverzameling neemt. Toch heeft deze methode nog een groot nadeel, namelijk, dat de methode een tamelijk ingewikkelde boekhouding vereist.



FIGUUR 9. Adressen in de Sierpiński-kromme

De grote vondst van BARNSLEY [1] is de volgende aanpassing van de zojuist beschreven methode. Het resultaat is een heel snelle methode om uitstekende approximaties te krijgen van de invariante verzameling van het IFS. We maken gebruik van een generator van *random* getallen die ons telkens een random getal uit $[0,1)$ levert. We nemen een willekeurig startpunt a. Als het random getal ligt in het interval $[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k})$ dan passen we de transformatie f_i toe, $i = 1, \ldots, k$. Zo krijgen we een door het toeval bepaalde rij van punten

$$a, f_{i_1}(a), f_{i_2} \circ f_{i_1}(a), f_{i_3} \circ f_{i_2} \circ f_{i_1}(a), f_{i_4} \circ f_{i_3} \circ f_{i_2} \circ f_{i_1}(a), \ldots \qquad (1)$$

Het plaatje van al deze punten blijkt een uitstekende benadering op te leveren van de invariante verzameling van het IFS. We zullen uiteenzetten hoe dat komt. Het is interessant dat de in [10] gegeven verklaring eenvoudiger en natuurlijker is dan de verklaring in [1]. Allereerst merken we op dat, zoals we boven reeds gezien hebben, de punten uit de rij snel in de buurt van de invariante verzameling liggen. We mogen eigenlijk wel aannemen dat de punten uit de rij tot de invariante verzameling behoren.

Voor het vervolg van ons betoog moeten we eerst nader ingaan op het begrip adres van een punt in een fractal. We doen dit aan de hand van de eerder besproken Sierpiński-kromme. Deze kromme is de invariante verzameling K van het in voorbeeld 1.4 beschreven IFS (f_1, f_2, f_3). Er geldt

$$K = f_1[K] \cup f_2[K] \cup f_3[K].$$

In de figuur 9 is zijn de indices gebruikt om deze verzamelingen aan te geven. Elk van de verzamelingen $f_i[K]$ is weer de vereniging van drie deelverzamelingen:

$$f_i[K] = f_i \circ f_1[K] \cup f_i \circ f_2[K] \cup f_i \circ f_3[K].$$

Enzovoort. Let hier goed op de volgorde van de f_i: om de verzameling $f_i \circ f_j[K]$ te krijgen, past men eerst f_j toe en daarna f_i. Elk punt p van de Sierpiński-kromme is de doorsnede van een dalende rij

$$f_{i_1}[K], f_{i_1} \circ f_{i_2}[K], f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ f_{i_3}[K], f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ f_{i_3} \circ f_{i_4}[K], \ldots$$

van gesloten deelverzamelingen van K; we noemen $i_1 i_2 i_3 i_4 \ldots$ het *adres* van p. Zie nogmaals de figuur 9 waarin het begin van enkele adressen is opgeschreven (althans zo kun je de cijfers ook interpreteren). Een adres van links naar rechts lezend krijgt men een steeds nauwkeuriger beeld van de positie van het punt met dat adres. We merken terzijde even op dat een punt soms meer dan één adres krijgt.

Nu komt het eenvoudige argument van PEITGEN [10]. Bij het maken van plaatjes met de computer werken we met een bepaalde nauwkeurigheid. Dat betekent dat de positie van een punt (pixel) bepaald is door het begin van het adres (lezend van links naar rechts). Laten we voor het gemak even aannemen dat de *positie van een punt bepaald is door de eerste vier getallen van zijn het adres.* Dan ligt, aannemend dat a in K ligt, het vijfde punt $f_{i_4} \circ f_{i_3} \circ f_{i_2} \circ f_{i_1}(a)$ uit de rij (1) volledig vast door de eerste vier getallen van zijn adres $i_4 i_3 i_2 i_1$ (onafhankelijk van het adres van a). Het volgende punt uit de rij (1) $f_{i_5} \circ f_{i_4} \circ f_{i_3} \circ f_{i_2} \circ f_{i_1}(a)$ is bepaald door de eerste vier getallen van zijn adres, namelijk $i_5 i_4 i_3 i_2$. Het volgende punt uit de rij is bepaald door $i_6 i_5 i_4 i_3$, enzovoort. Hoe weten we nu dat we alle punten van de invariante verzameling (of, beter gezegd, de pixels die de punten voorstellen) krijgen? Wel, het aantal transformaties van het IFS is eindig en het aantal posities uit het adres van een punt dat de positie van het punt bepaalt, is eindig. In ons voorbeeld van de Sierpiński-kromme zijn er drie transformaties en vier significante posities; dat geeft in het totaal $3^4 = 81$ verschillende beginstukken van adressen. Wanneer we er maar voor kunnen zorgen dat de rij van indices zo in elkaar zit dat iedere "string" van een vooraf gegeven lengte erin voorkomt, dan zullen alle adressen bezocht worden; en dat is nu precies wat random rijen voor ons doen!

We zullen in onze voordracht nog aandacht schenken aan een belangrijke verfijning van deze methode. In het bovenstaande hebben we de kansen waarmee de transformaties uit het IFS optraden gelijk genomen. Maar ook bij transformaties van een IFS is het zó dat sommige transformaties belangrijker zijn dan andere. Het blijkt dat door variatie in de verdeling van de random veranderlijke over de verschillende transformaties een fraaie fijnregeling van de figuren bereikt kan worden.

Ook zullen we laten zien hoe plaatjes van fractals gebruikt kunnen worden bij het onderzoek naar het random-karakter van rijen.

REFERENTIES

[1] M.F. BARNSLEY, *Fractals everywhere*, Academic Press, Orlando 1988
[2] *Fractals, non-integral Dimension and Applications*, edited by G. CHERBIT, J. Wiley and Sons, New York
[3] GERALD A. EDGAR, *Measure, Topology and Fractral Geometry*, Springer, Berlin 1990
[4] K. FALCONER, *Fractal Geometry*, John Wiley, New York 1990
[5] K. FALCONER, *Techniques in fractal Geomerty*, John Wiley, New York 1997
[6] J.E. HUTCHINSON, *Fractals and Self-similarity*, Indiana University Mathematics Journal **30** (1981), 713–747
[7] B.B. MANDELBROT, *Les Objets fractals: Forme, Hasard et Dimension*, Flammarion, Paris & Montreal 1975

[8] B.B. MANDELBROT, *The fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York 1977

[9] H.-O. PEITGEN, H. JÜRGENS and D. SAUPE, *Fractals for the Classroom I, II*, Springer, New York 1992

[10] H.-O. PEITGEN and P.H. Richter, *The Beauty of Fractals, Images of Complex Dynamical Systems*, Springer, Berlin 1986

[11] P. PRUSINKIEWICZ and A. LINDERMAYER, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer, Berlin 1990

Medewerkers aan de Vacantiecursus 1997

DOCENTEN

Prof.dr. J.M. Aarts
wg. TU Delft, Faculteit TWI, Mekelweg 4, 2628 CD Delft, 015 - 2785399,
e-mail: j.m.aarts@twi.tudelft.nl
hs. Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft, 015 - 2126448

Prof.dr. H.G. Dehling
wg. RU Groningen, Vakgroep Wiskunde, Postbus 800, 9700 AV Groningen,
050 - 3633971, e-mail: dehling@math.rug.nl
hs. Van Deyssellaan 90, 9721 WX Groningen,
050 - 5267317

Prof.dr. C.A.J. Klaassen
wg. UvA Amsterdam, Vakgroep Wiskunde, Plantage Muidergracht 24,
1018 TV Amsterdam, 020 - 5255010, e-mail: chrisk@fwi.uva.nl
hs. Vossenschanslaan 5, 3445 EB Woerden, 0348 - 425148

Drs. W. Kleijne
wg. Rijksinspectiekantoor, Postbus 933, 8901 BS Leeuwarden,
058 - 2133132,
hs. Zwette 130, 8446 ML Heerenveen, 051 - 3624368

Dr. J.A. van Maanen
wg. RU Groningen, Vakgroep Wiskunde, Postbus 800, 9700 AV Groningen,
050 - 3637132, e-mail: maanen@math.rug.nl
hs. Nieuwe Boteringestraat 86I, 9712 PR Groningen, 050 - 3187867,
e-mail: pyco@euronet.nl

Prof.dr.ir. J.H.A. de Smit
wg. Universiteit Twente, Fac. Toegepaste Wiskunde, Postbus 217, 7500 AE Enschede,
053 - 4893386, e-mail: desmit@math.utwente.nl
hs. Spölminkkamp 13, 7524 DV Enschede, 053 - 4431886,

Dr. I.H. Stamhuis
wg. VU Amsterdam, Vakgroep Algemene Vorming, De Boelelaan 1081, 1081 MC Amsterdam, 020 - 4447983, fax: 020 - 4447988
hs. Hogerlustlaan 10, 1191 CM Ouderkerk a/d Amstel, 020 - 4963603

Prof.dr.drs. A.G.M. Steerneman
wg. RU Groningen, Vakgroep Econometrie, Postbus 800, 9700 AV Groningen, 050 - 3633807, e-mail: A.G.M.Steerneman@ECO.RUG.nl
hs. Lantingehof 2, 9403 PE Assen, 0592 - 342643

OVERIGEN

Prof.dr. J. van de Craats
wg. UVA/OU, e-mail: jcr@euronet.nl
hs. Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL Oosterhout, 0162 - 457364

Prof.dr. A.W. Grootendorst
hs. Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, 070 - 3232936

Dr. M. Bakker
wg. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam, 020 - 5924172, e-mail: miente@cwi.nl

Mevrouw M. Bruné
wg. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam, 020 - 5924249, e-mail: mieke@cwi.nl

MC SYLLABI

1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang besliskunde, deel 1: wiskundige basiskennis*. 1965.

1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening*. 1965.

1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 3: statistiek*. 1966.

1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*. 1966.

1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde*. 1966.

1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering 1*. 1968.

1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang besliskunde, deel 6b: wiskundige programmering 2*. 1977.

1.7a G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1*. 1968.

1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2*. 1970.

1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7c: dynamische programmering 3*. 1971.

1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*. 1968.

2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*. 1967.

2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*. 1968.

3.1 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1*. 1967.

3.2 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2*. 1968.

3.3 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3*. 1968.

4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen*. 1968.

5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde*. 1968.

6 K.K. Koksma. *Cursus ALGOL 60*. 1969.

7.1 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 1*. 1969.

7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2*. 1969.

8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen*. 1969.

9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijls. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1970.

9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1970.

10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*. 1970.

11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijls, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*. 1971.

12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra*. 1971.

13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*. 1971.

14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatietheorie*. 1971.

15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1972.

15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1973.

15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*. 1975.

16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren*. 1973.

16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60*. 1973.

17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1*. 1973.

17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2*. 1973.

17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3*. 1976.

18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Iongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971*. 1973.

19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens*. 1973.

20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*. 1976.

21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid*. 1975.

22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassingen van naburigheid*. 1976.

23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*. 1976.

23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*. 1977.

24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden*. 1974.

25 *Colloquium structuur van programmeertalen*. 1976.

26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1*. 1976.

26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2*. 1976.

27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden*. 1976.

28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems*. 1976.

29.1 J.C.P. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*. 1976.

29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2*. 1977.

30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen*. 1983.

31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie*. 1976.

32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfsystemen*. 1976.

33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*. 1977.

34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek*. 1977.

35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics*. 1978.

36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen*. 1977.

37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren*. 1978.

38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I*. 1979.

38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II*. 1979.

39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen*. 1978.

40 J. van Tiel. *Convexe analyse*. 1979.

41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations*. 1979.

42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen*. 1980.

43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus)*. 1980.

44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations*. 1980.

45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur*. 1980.

46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1*. 1981.

46.2 P.G.M. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2*. 1981.

47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices*. 1981.

47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations*. 1981.

47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I*. 1981.

47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II*. 1981.

47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I*. 1981.

47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II*. 1981.

47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation*. 1981.

48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1*. 1982.

48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2*. 1982.

49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups*. 1982.

50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie*. 1982.

51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie*. 1983.

CWI SYLLABI

1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde.* 1984.

2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981–1982. Mathematical structures in field theories.* 1984.

3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions.* 1984.

4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1.* 1984.

5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2.* 1984.

6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982–1983. Mathematical structures in field theories.* 1985.

7 Vacantiecurus 1985: *Variatierekening.* 1985.

8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization.* 1985.

9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations.* 1985.

10 Vacantiecursus 1986: *Matrices.* 1986.

11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes.* 1986.

12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener.* 1986.

13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2.* 1987.

14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school.* 1987.

15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen.* 1987.

16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984–1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1.* 1988.

17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985–1987.* 1988.

18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening.* 1988.

19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX.* 1988.

20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1.* 1988.

21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2.* 1988.

22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3.* 1988.

23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer.* 1989.

24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde.* 1989.

25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw.* 1989.

26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986–1987. Mathematical structures in field theories.* 1990.

27 Vacantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen.* 1990.

28 Vacantiecursus 1991: *Meetkundige structuren.* 1991.

29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat.* 1992.

30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986–1987. Lectures on Kac-Moody algebras.* 1992.

31 Vacantiecursus 1992: *Systeemtheorie.* 1992.

32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987–1992.* 1992.

33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu.* 1993.

34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC.* 1992.

35 Vacantiecursus 1993: *Het reële getal.* 1993.

36 Vacantiecursus 1994: *Computeralgebra.* 1994.

37 G. Alberts. *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Syllabus.* 1994.

38 G. Alberts, J. Schut (eds.). *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Reader.* 1994.

39 E.A. de Kerf, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1989–1990. Mathematical structures in field theory.* 1996.

40 Vacantiecursus 1995: *Kegelsneden en kwadratische vormen.* 1995.

41 Vacantiecursus 1996: *Chaos.* 1996.

42 H.C. Doets. *Wijzer in Wiskunde.* 1997.

43 Vacantiecursus 1997: *Rekenen op het Toeval.* 1997.